Collegedictaat vloeistoffen

Karel Kok - juli 2015

Dit is de eerste opzet voor het dictaat voor het vak vloeistoffen wat in het vierde kwartaal van 2014-2015 aan de HAN gegeven wordt. Dit dictaat is geenszins af en kan (en zal) ongetwijfeld (spel)fouten bevatten. Zorg dus dat je kritisch leest!
Om de kwaliteit van dit dictaat te verbeteren vraag ik iedereen fouten door te mailen naar `karel.kok@gmail.com`, vermeld hierbij ook het paragraafnummer.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Druk

De vloeistofleer gaat over waarom en hoe vloeistoffen bewegen. De reden dat vloeistoffen bewegen is eigenlijk altijd een drukverschil. Voordat we naar drukverschillen kunnen kijken zullen we eerst moeten kijken wat *druk* is.

1.1 Mechanische druk

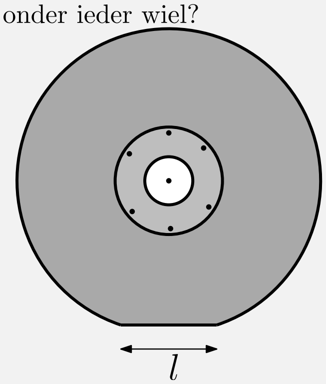
Druk is de hoeveelheid kracht op een bepaald oppervlak:

$$P = \frac{F}{A} \tag{1.1}$$

Hierin is:
F: de kracht in newton (N).
A: het oppervlak in vierkante meter (m^2).
P: de druk in pascal (Pa).
Deze druk wordt ook wel *mechanische druk* genoemd.
De eenheid van druk, de pascal, is vernoemd naar de Franse wis- en natuurkundige Blaise Pascal (1623-1662).

Voorbeeld 1.1

Een vrachtauto van $m = 10.000$ kg heeft vier wielen. De wielen zijn $b = 30$ cm breed en de wielen zijn zo ingedrukt dat ze de weg over een lengte van $l = 10$ cm raken
► Wat is de mechanische druk onder ieder wiel?



Een wiel van een vrachtauto deukt in.

De kracht die de vrachtauto op de weg uitoefent is de zwaartekracht F_z. Deze is gelijk aan:

$$F = F_z = mg = 98,1 \text{ kN}$$

Het totale oppervlak A wordt gegeven door $A = 0,30 \cdot 0,10 \cdot 4 = 0{,}12 \text{ m}^2$.
Hierdoor wordt de druk per wiel gelijk aan:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{98,1 \cdot 10^3}{0,12} = 0,82\text{MPa}$$

1.2 Drukverschil

Een ballon staat bol. De ballon staat bol omdat de druk *in* de ballon groter is dan de druk *buiten* de ballon. Vaak wordt in deze situaties gesproken over een *drukverschil*.
Dit drukverschil is uit te rekenen als:

$$\Delta P = P - P_{\text{omgeving}} \tag{1.2}$$

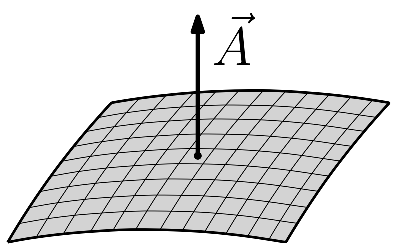
Hierin is P de *absolute druk*. En P_{omgeving} de omgevingsdruk, welke in dit dictaat een vaste waarde heeft.

$$\boxed{P_{\text{omgeving}} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

Druk is een *scalaire grootheid*, dit wil zeggen, druk heeft geen richting. Bovenstaande vergelijking is een scalaire vergelijking maar eigenlijk weten we dat kracht een *vector* is en een richting heeft. Om de vergelijking vectorieel op te schrijven geven we ook het oppervlak een richting:

$$\Delta P = \frac{\vec{F}}{\vec{A}} \tag{1.3}$$

De richting van het oppervlak staat altijd *loodrecht* op het oppervlak en wijst van het ingesloten oppervlak *weg*, zie figuur 1.1.



Figuur 1.1: De richting van het oppervlak staat loodrecht op het vlak van het ingesloten volume afgericht.

Belangrijk hierbij is dat de druk en het oppervlak hierbij *parallel* staan, $\vec{F} \parallel \vec{A}$.

Voorbeeld 1.2

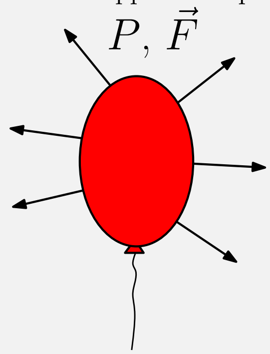
Een ballon is opgeblazen tot een overdruk van 0,150 kPa. Het oppervlak van de ballon is $A = 400 \text{ cm}^2$.
▶ Wat is de druk in de ballon?
De absolute druk is uit te rekenen met vergelijking (1.2).

$$P = P_{\text{omgeving}} + \Delta P = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

▶ Wat is de kracht op de ballon?
Dit is op te lossen met vergelijking (1.1):

$$F = PA = 6,00 \text{ N}$$

▶ Wat is de richting van de kracht en het oppervlak op de ballon?



De kracht- en oppervlakrichting van een ballon met een hogere binnen- dan buitendruk.

De richting van de kracht en het oppervlak is op ieder punt anders. Ze staan steeds parallel aan elkaar en loodrecht op het oppervlak.

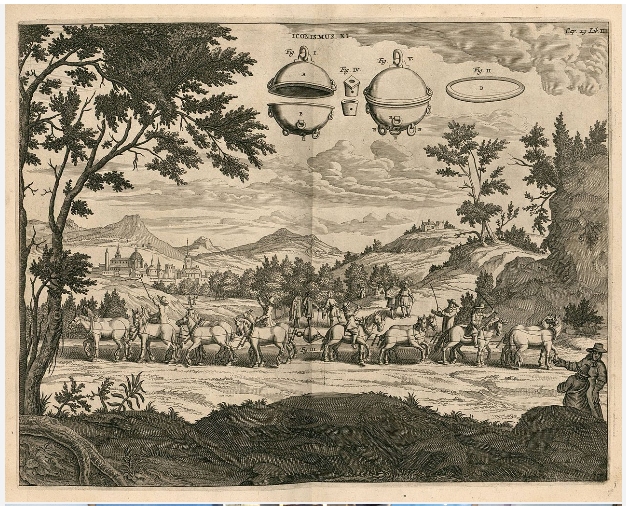
1.2.1 Over- en onderdruk

Drukverschillen zijn er eigenlijk in twee soorten, *overdruk* en *onderdruk*. De ballon uit voorbeeld 1.2 is een duidelijk voorbeeld van overdruk. Een jampot die plopt zodra deze voor de eerste keer opengemaakt wordt is een voorbeeld van onderdruk.
Het drukverschil bij over- en onderdruk is als volgt te noteren:

$$\Delta P > 0 \text{ Pa: overdruk} \tag{1.4}$$
$$\Delta P < 0 \text{ Pa: onderdruk} \tag{1.5}$$

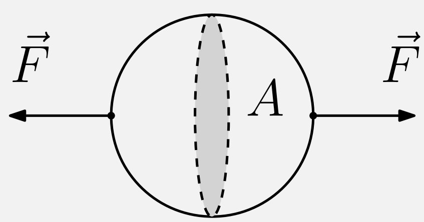
Voorbeeld 1.3

In 1657 voerde Otto von Guericke een beroemd experiment uit met de Magdeburger halve bollen. Hij had twee halve bollen met een diameter van 50 cm waar hij de lucht uit zoog. Hij probeerde de bollen met zestien paarden van elkaar af te krijgen. De paarden leverden hiermee een totale kracht van 16 kN.



Boven: Een prent van het experiment van Gaspar Schott uit 1672. Bron: `http://en.wikipedia.org/wiki/Magdeburg_hemispheres`
Onder: De originele Magdeburger bollen met pomp in het Deutsches Museum in München. Foto: Karel Kok, 2014.

► Wat is de druk in de bollen als deze nét niet van elkaar af zouden komen?
Het effectieve oppervlak waaraan de paarden trekken is niet het boloppervlak maar het cirkeloppervlak. Deze twee oppervlakken staan immers parallel aan de kracht die de paarden leveren.



De kracht werkt effectief alleen op het cirkeloppervlak.

Met vergelijking (1.3) kunnen we nu het drukverschil uitrekenen:

$$\Delta P = \frac{\vec{F}}{\vec{A}} = -\frac{16000}{\pi \cdot 0,25^2} = -81 \text{ kPa}$$

Hierbij is het minteken erbij gekomen omdat de kracht en het oppervlak tegengesteld aan elkaar zijn. De buitenlucht is immers op het oppervlak met een lagere druk (naar binnen) aan het duwen.
Hierdoor wordt de totale druk in de bollen:

$$P = P_{\text{omgeving}} + \Delta P = 1,013 \cdot 10^5 - 81 \cdot 10^3 = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Toen men later de apparatuur van Otto von Guericke gebruikte om de bollen wederom "vacuum" te pompen bleek dat de druk in de bollen 859 Pa was.
► Wat is de benodigde kracht om de bollen van elkaar te krijgen?
Dit rekenen we uit met vergelijking (1.3). Het drukverschil wordt:

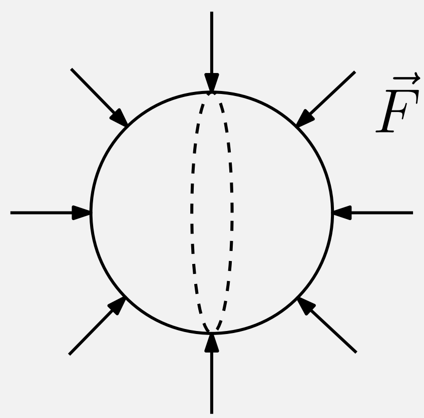
$$\Delta P = 859 - 1,013 \cdot 10^5 = -1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Hiermee wordt de kracht:

$$F = \Delta P\ A = \Delta P\ \pi r^2 = 20 \text{ kN}$$

► Hoeveel kracht moeten de bollen zelf weerstaan om niet te imploderen?
Dit rekenen we wederom uit met vergelijking (1.3). Nu bedenken we ons echter dat de druk van *alle* kanten op de bol werkt. We moeten voor het oppervlak dus nu wel het volledige boloppervlak nemen, dit oppervlak staat immers *overal* parallel aan de kracht van de lucht:

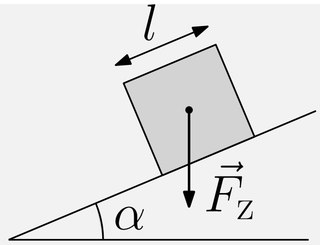
$$F = \Delta P\ A = \Delta P\ 4\pi r^2 = 79 \text{ kN}$$



De overdruk van buiten duwt de bollen in elkaar.

Voorbeeld 1.4

Een kubus met een massa van 50 kg en ribbe $l = 30$ cm glijdt van een helling. De hoek die de helling met de horizontaal maakt is $\alpha = 15°$.



Een kubus glijdt van een helling.

▶ Wat is de druk op de helling?
De zwaartekracht en het oppervlak staan niet parallel aan elkaar. Het effectieve oppervlak waar de zwaartekracht op duwt is:

$$A_{\text{eff}} = A\cos(\alpha) = l^2\cos(\alpha) = 8,7 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$$

Hiermee wordt de druk op de helling gelijk aan:

$$P = \frac{F_\text{z}}{A_{\text{eff}}} = 5,6\ \text{kPa}$$

Voorbeeld 1.5

Een raam heeft een hoogte van 1,0 m en een breedte van 2,0 m.
▶ Hoe groot is de druk op het raam?
Deze vraag is een instinker. Men zou dit uit kunnen rekenen als:

$$F = PA = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1,0 \cdot 2,0 = 2,0 \cdot 10^5\ \text{N}$$

Dit zou het raam nooit overleven en we weten dat we prima een raam in een kozijn kunnen plaatsen.
Wat we hier vergeten zijn is dat er aan de binnenkant van het raam dezelfde druk is. Netto is er dus geen drukverschil, $\Delta P = 0$. Hiermee wordt de kracht op het raam met vergelijking (1.3) automatisch ook 0 N.

1.3 Drukmaten

De eenheid van druk is de pascal. Er zijn in het dagelijks gebruik echter meerdere eenheden voor druk.
De *bar* is een handige manier om met pascal te rekenen.

$$1\ \text{bar} \equiv 10^5\ \text{Pa} \tag{1.6}$$

Een eenheid die in ziekenhuizen veel gebruikt wordt is mmHg, dit staat voor millimeters kwik. Één mmHg is de druk die een hoogte van één millimeter vloeibare kwik veroorzaakt, de exacte berekening voor 1 mmHg wordt duidelijk in paragraaf 2.2.

$$1\ \text{mmHg} = 133,322\ \text{Pa} \tag{1.7}$$

In de meteorologie wordt ook nog wel eens de *atmosfeer*, atm, gebruikt. Dit is de gemiddelde luchtdruk op zeeniveau, welke we eigenlijk al in paragraaf 1.2 zagen.

$$1\ \text{atm} = 1,01325 \cdot 10^5\ \text{Pa} \tag{1.8}$$

Hoofdstuk 2

Vloeistofdruk

Ik dit hoofdstuk gaan we kijken naar de druk in vloeistoffen. Het blijkt dat deze niet direct van de massa af hangt maar van de massadichtheid.

2.1 Massadichtheid

De massadichtheid ρ is gedefinieerd als:

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.1}$$

Hierin is:
m: de massa in kilogram (kg).
V: het volume in kubieke meters (m^3).
ρ: de massadichtheid in kilogram per kubieke meter ($\mathrm{kg\ m^{-3}}$).

Voorbeeld 2.1

Men wil een eikenhouten boomstam met een straal van 15 cm 75 kg zwaar laten zijn. De massadichtheid van eikenhout is $0{,}67 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$.
► Hoe lang moet deze stam zijn?
Het benodigde volume is:

$$V = \frac{m}{\rho} = 0,11\ \mathrm{m}^3$$

Hiermee is de lengte te berekenen als:

$$l = \frac{V}{A} = \frac{V}{\pi r^2} = 1,6\ \mathrm{m}$$

2.2 Druk in vloeistoffen

We gaan kijken naar de druk onderin een zwembad van 2,0 m diepte. Als we hiervoor vergelijking (1.3) gaan invullen zullen we eerst iets over de kracht moeten gaan zeggen.
De kracht is afhankelijk van de hoeveelheid massa die zich boven ons bevind:

$$F = F_{\mathrm{z}} = mg = \rho V g$$

Waar we meteen de massadichtheid van het water ingevuld hebben.
Nu kunnen we kijken naar de extra druk die dit oplevert:

$$\Delta P = \frac{\rho\ \Delta V\ g}{A}$$

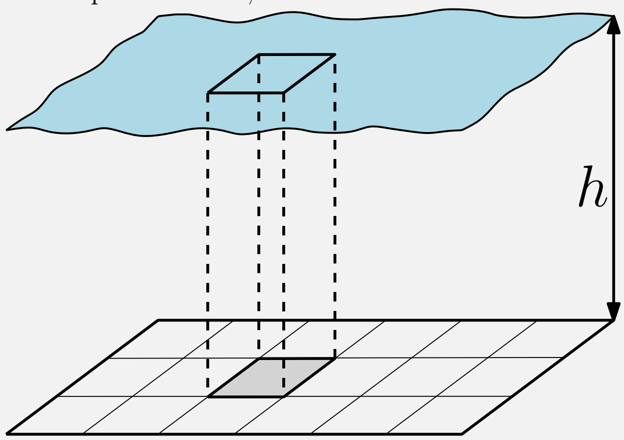
Als we inzien dat het volume, V, afhankelijk is van het oppervlak, A, als $V = A\ \Delta h$, waarin Δh de diepte van het zwembad is. Is de vergelijking te reduceren tot:

$$\Delta P = \rho\ g\ \Delta h \tag{2.2}$$

We zien dus dat het volume van het zwembad niet van belang is. Alleen de hoogte van de vloeistofkolom, h. De druk op de bodem van het zwembad is dus overal het zelfde.

Voorbeeld 2.2

Een zwembad heeft een diepte van $h = 2{,}0$ m. De dichtheid van water is $0{,}998{\cdot}10^3$ kg m^{-3}



Een zwembad met diepte h.

► Wat is de druk onderin het zwembad?
De overdruk onderin het zwembad wordt gegeven door vergelijking (2.2):

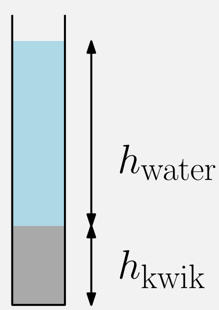
$$\Delta P = \rho\ g\ \Delta h = 2,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Voor de absolute druk onderin het zwembad moeten we hier nog de omgevingsdruk bij op tellen:

$$P = 2,0 \cdot 10^4 + 1,013 \cdot 10^5 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Voorbeeld 2.3

Een buisje is gevuld met een laag kwik van 3,00 cm, met daarop een laag water van 15,0 cm. De dichtheden van water en kwik zijn $0{,}998{\cdot}10^3$ kg m^{-3} en $13{,}5\ {\cdot}10^3$ kg m^{-3} respectievelijk.



Een buisje met kwik en water.

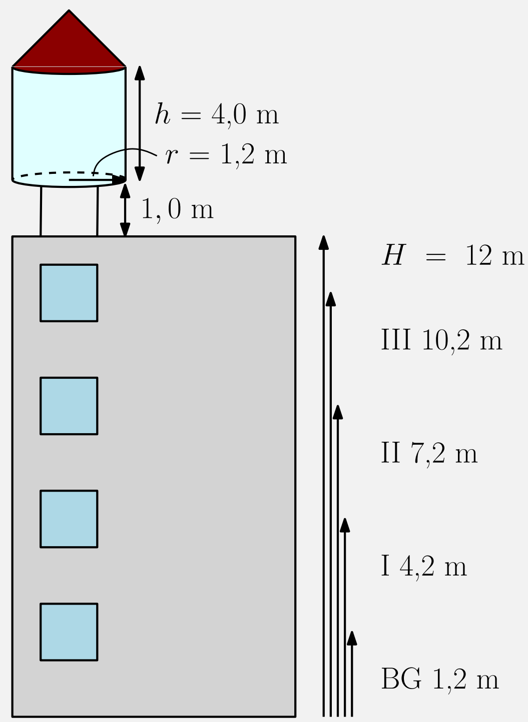
► Wat is de overdruk onderin de buis?

We moeten dit in twee stappen uitrekenen:

$$\Delta P = \Delta P_{\text{water}} + \Delta P_{\text{kwik}} = 1,47 \cdot 10^3 + 4,95 \cdot 10^3 = 5,44 \text{ kPa}$$

Voorbeeld 2.4

We bekijken een flatgebouw met de afmetingen zoals in onderstaand figuur. De cilinder bovenop het flatgebouw bevat water tot aan de onderkant van het “hoedje”. De cilinder staat op poten.



Sommige flatgebouwen maken gebruik van een watertoren om hun water uit de kranen te krijgen.

► Hoeveel liter water past er in de cilinder?
Het volume van de cilinder is:

$$V = \pi r^2 h = 18 \text{ m}^2 = 18 \cdot 10^3 \text{ L}$$

► Wat is de waterdruk op de begane grond en de derde verdieping?

$$\Delta P_{\text{BG}} = P_{\text{omgeving}} + \rho g h_{\text{BG}} = 1,013 \cdot 10^5 + 0,998 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 15,8 = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Delta P_{\text{III}} = P_{\text{omgeving}} + \rho g h_{\text{III}} = 1,013 \cdot 10^5 + 0,998 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 6,8 = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

De kranen in de flat hebben een radius van 0,50 cm. We kunnen met onze duim maximaal 8,5 N zetten.
► Op welke verdieping kunnen we de kraan nog dicht duwen?
Dit kan op een aantal manieren uitgerekend worden.
Eerst kijken we naar de maximale druk die we kunnen tegenhouden:

$$\Delta P = \frac{F}{A} = \frac{8,5}{\pi r^2} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Dit komt overeen met een kolomhoogte van:

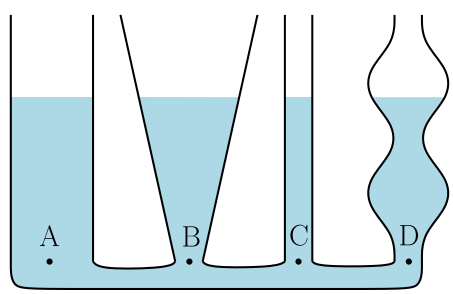
$$\Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{1,1 \cdot 10^5}{0,998 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 11 \text{ m}$$

Dit betekent dat we een druk, opgebouwd door een kolom van 11 m water, tegen kunnen houden. Dit is komt in onze flat overeen met verdieping II. De druk hier wordt bepaald door een water kolom van $(4,0 + 1,0 + (12 - 7,2)) = 9{,}8$ m. Op verdieping I zou dit $(4,0 + 1,0 + (12 - 4,2)) = 12{,}8$ m zijn, wat een te hoge druk op levert.
Men merkt na een tijdje dat men de kraan op de eerste verdieping toch dicht geduwd krijgt.
► Hoeveel liter water is er uit te toren verdwenen?
We weten uit de vorige vraag dat we maximaal een kolom van 11 m tegen kunnen houden. We moeten dus vanaf de eerste verdieping 11 m omhoog rekenen. Dan zitten we 11-(12-4,2)-1,0 = 2,2 m *in* de water toren. Dat is dus 4,0-2,2=1,8 m minder water.
Dit komt overeen met:

$$V = \pi r^2 h = 8,1 \text{ m}^3 = 8,1 \cdot 10^3 \text{ L}$$

2.3 Druk vergelijken

In figuur 2.1 zijn vier buisjes met verschillende vormen te zien welke gevuld zijn met water. De buisjes zijn onder met elkaar verbonden, we spreken hier van *communicerende vaten*. Alle buisjes zijn tot dezelfde hoogte gevuld. De drukken onderaan bij punten A, B, C en D zijn allen gelijk. De "waterkolom" die op ieder van hen drukt is immers even hoog. Zie vergelijking (2.2). Kolom A bevat weliswaar het meeste water, maar de kracht wordt dus ook over een groter oppervlak verspreid. Bij kolom B wordt deze kracht deels door de wanden van het buisje opgevangen.
Een andere manier om in te zien dat de druk overal gelijk moet zijn is de volgende redenering. Stel dat de druk bij A hoger is dan bij D. Dit betekent dat er onderin een drukverschil is, de buis onderin heeft een bepaald oppervlak, er zal nu een kracht zijn die de vloeistof in beweging zal brengen van A naar D toe. We zien echter geen enkele vorm van stroming. De druk bij A en D moeten dus wel gelijk zijn.



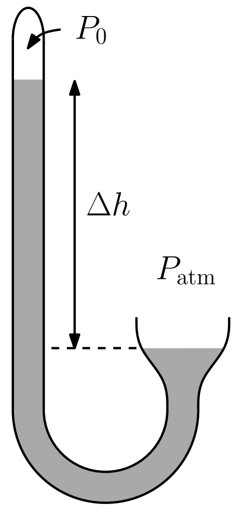
Figuur 2.1: Vier buisjes met water, allen met beneden dezelfde druk.

In het algemeen kan gesteld worden dat de vloeistofdruk bij *stationaire*, dat wil zeggen er is geen stroming, communicerende vaten op gelijke hoogte het zelfde is.

2.4 Barometer

De barometer is een meetinstrument om de luchtdruk te meten. Het wordt veelal gebruikt om het weer te voorspellen. Een hoge luchtruk betekent doorgaans goed weer en een lage luchtdruk

slecht weer.
Het principe van de barometer is gebaseerd op de druk in vloeistoffen. Om te zorgen dat de barometer niet al te groot hoeft te zijn wordt deze meestal gevuld met kwik[1], zie figuur 2.2.



Figuur 2.2: Schematische voorstelling van een barometer. Het belletje aan de rechter kant is een reservoir zodat de linker kolom steeds gevuld kan blijven met kwik.

De linker buis van de barometer is van boven afgesloten waardoor er een vacuüm ontstaat ($P_0 = 0$ Pa).
De druk ter hoogte van de stippellijn is overal het zelfde. Immers de kolom kwik is een communicerend vat. Omdat de druk aan het oppervlak van het kwik in het reservoir gelijk is aan de buitendruk P_{atm} weten we dat de kwikdruk *in* de buis ter hoogte van de stippellijn ook de omgevingsdruk P_{atm} moet zijn.
Het berekenen van de absolute druk aan de linkerkant van de barometer is echter niet zo lastig. De druk wordt hier opgebouwd door druk P_0 en de kwikkolom met hoogte Δh.
Stel dat de hoogte $\Delta h = 76{,}0$ cm. Nu kunnen we voor de druk ter hoogte van de stippellijn aan de linkerkant in de barometer stellen:

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \rho g \Delta h \\ &= 0 + 13,5 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,760 \\ \Rightarrow P &= 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

De maximale luchtdruk die ooit in Nederland gemeten is was op 26 januari 1923 en bedroeg $1,050 \cdot 10^5$ Pa. Een barometer moet dus minimaal 80 cm lang zijn. Is de barometer korter dan is er geen vacuümbel boven de kwikkolom aan de linker kant.

Voorbeeld 2.5

Barometers kunnen ook gevuld worden met water.
► Wat is de minimumlengte van een met water gevulde barometer?
Als we weten dat de maximale luchtdruk $1,05 \cdot 10^5$ Pa is. We kunnen nu stellen dat deze druk gegenereerd wordt door een kolom water van:

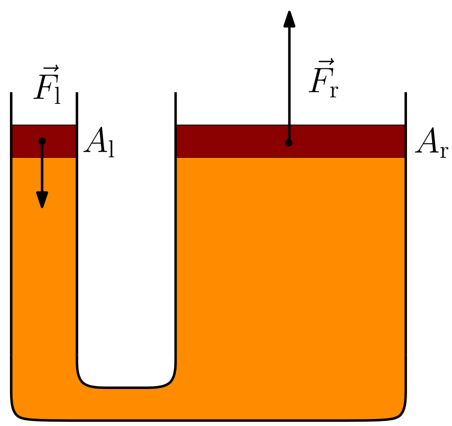
$$h = \frac{P_{\text{omg}}}{\rho g} = \frac{1,05 \cdot 10^5}{0,998 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 10,7 \text{ m}$$

[1]Iedere vloeistof is in principe goed maar niet praktisch, zie voorbeeld 2.5

> Alleen met zo'n lange kolom water is er een vacuümbel te creëren. Alleen zo ontstaat er gelijke druk tussen het water in het reservoir en de luchtdruk.

2.5 Hydrauliek

In de klassieke mechanica worden hefbomen gebruik om met weinig kracht veel kracht te zetten. Dit zelfde principe kan ook met vloeistoffen gebruikt worden. Er wordt dan gebruik gemaakt van de zéér geringe samendrukbaarheid van vloeistoffen.
Als de druk op water met 1 atm verhoogd wordt zal het met een factor $46 \cdot 10^{-11}$ krimpen in volume. We zullen er vanaf nu dus vanuit gaan dat vloeistoffen niet samendrukbaar zijn.



Figuur 2.3: Met een hydraulische pomp kan men veel kracht zetten.

We kijken naar een communicerend vat gevuld met olie[2].
Aan de linker kant hebben we een cirkelvormig oppervlak met een straal van 20 cm. Aan de rechter kant hebben we ook een cirkelvormig oppervlak maar met een straal van 1,5 m.
Stel dat we links een kracht kunnen zetten van 0,50 kN. We kunnen dan eenvoudig uitrekenen wat de resulterende kracht aan de rechter kant is. We gebruiken het feit dat olie niet samendrukbaar is en realiseren ons dat de hoeveelheid olie die we links omlaag drukken rechts weer omhoog komt.
Met vergelijking (1.1) en de wet van communicerende vaten wordt dit:

$$\begin{aligned} P_\mathrm{l} &= P_\mathrm{r} \\ \frac{F_\mathrm{l}}{A_\mathrm{l}} &= \frac{F_\mathrm{r}}{A_\mathrm{r}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Als we dit invullen krijgen we:

$$F_\mathrm{r} = \frac{0,50 \cdot 10^3 \cdot \pi 1,5^2}{\pi 0,20^2} = 28 \text{ kN}$$

Hiermee kunnen we dus met gemak een auto optillen.
Alleen, net als bij hefbomen, geldt nog steeds de "*hefboomregel*", de arbeid die geleverd wordt is het zelfde. We moeten de linker zuiger dus véél verder induwen om de auto een meter op te tillen.

[2] Er wordt vaak olie gebruikt omdat het vriespunt verder onder nul ligt en het kookpunt verder boven de 100°

Hoofdstuk 3

De wet van Archimedes

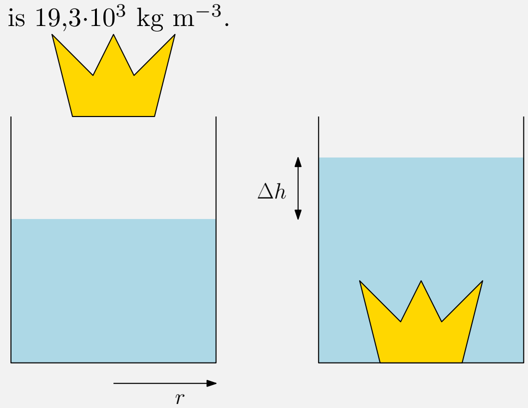
De Griekse filosoof Archimedes (287-212 v.Chr) is wellicht het best bekend vanwege zijn *eureka* uitspraak. Deze deed hij, volgens de legende, in bad. De Griekse koning had hem gevraagd of hij na kon gaan of zijn kroon van zuiver goud gemaakt was. Archimedes nam de opdracht aan en ging naar huis. Thuis in bad realiseerde hij zich dat de dichtheid van goud hoger was dan die van zilver en dus een veel kleiner volume nodig heeft voor een zelfde gewicht. Hij sprong uit bad en rende, naakt, naar de koning en riep *eureka*[1].
De verhoging van vloeistofniveau als er een voorwerp in ondergedompeld wordt is nog steeds bekend als “De wet van Archimedes”.

3.1 De wet van Archimedes

De wet van Archimedes stelt dat als een steen met een volume van V in water afgezonken wordt, er een zelfde volume V_v water verplaatst moet worden.

Voorbeeld 3.1

Een kroon met een massa van is $m = 3{,}5$ kg wordt ondergedompeld in water. Hierbij komt het water Δh 0,44 cm omhoog. De radius van het cilindervormige vat is $r = 12$ cm. De dichtheid van goud is $19{,}3 \cdot 10^3$ kg m^{-3}.



Volgens de legende moest Archimedes bepalen of de kroon van zuiver goud gemaakt was.

► Is de kroon van zuiver goud gemaakt?

[1] Ik heb het

De kroon zinkt en verplaatst een volume water. Dit volume is:

$$V_\mathrm{v} = \pi r^2 h = \pi \cdot 0,12^2 \cdot 0,0044 = 2,0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$$

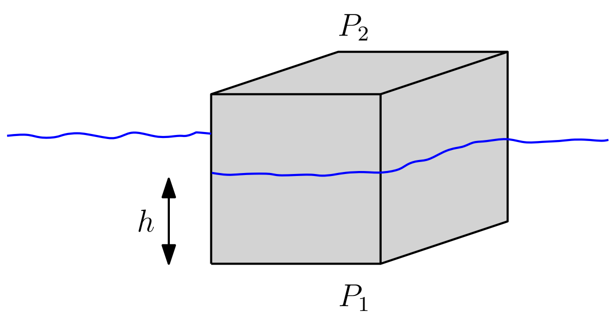
De dichtheid van deze kroon is dus:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3,5}{2,0 \cdot 10^{-4}} = 17,6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$$

De kroon is dus niet van zuiver goud gemaakt.

3.2 Drijven

Als een voorwerp drijft moet er door de vloeistof waar het in zit een "normaalkracht" geleverd worden. Bij vloeistoffen noemen we deze druk de *opwaartse kracht* of drijfkracht.



Figuur 3.1: Een drijvende kubus in het water.

In figuur 3.1 is een kubus in het water te zien. De druk onder de kubus P_2 is groter dan de buitendruk P_1, hij wordt immers groter doordat er een kolom vloeistof met hoogte h boven zit. Hieruit volgt, via vergelijking (1.3) dat er door dit drukverschil een kracht uitgeoefend wordt op het oppervlak (de bodem) van de kubus welke omhoog gericht is.
Het drukverschil wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}\Delta P &= \rho\ g\ \Delta h \\ &= \frac{F_\mathrm{D}}{A}\end{aligned}$$

Waarin F_D de opwaartse kracht is.
Als we dit oplossen voor de opwaartse kracht krijgen we:

$$\begin{aligned}F_\mathrm{D} &= \rho g h A \\ &= \rho g V_\mathrm{v}\end{aligned}$$

Met V_v het verplaatste volume.
Dit is ook te schrijven als:

$$F_\mathrm{D} = m_\mathrm{v} g \tag{3.1}$$

Waarbij m_v de massa van de verplaatste vloeistof is.

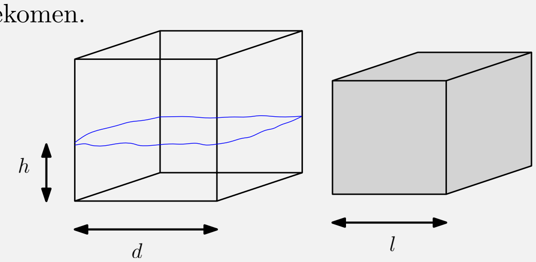
Uit vergelijking (3.1) kunnen we ook concluderen dat voorwerpen zullen drijven zolang hun dichtheid kleiner is dan de dichtheid van de vloeistof waar ze zich in bevinden, immers:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{D} &\geq F_\mathrm{g} \\ m_\mathrm{v} g &\geq mg \\ m_\mathrm{v} &\geq m \\ \rho_\mathrm{vloeist} V_\mathrm{v} &\geq \rho V_\mathrm{v} \\ \rho_\mathrm{vloeist} &\geq \rho \end{aligned}$$

Hierbij is het groter-dan-teken alleen van toepassing wanneer een drijvend voorwerp onder water geduwd wordt en na loslaten omhoog geduwd wordt.

Voorbeeld 3.2

Een kubus met een massadichtheid van $\rho_\mathrm{k} = 0{,}500 \cdot 10^3$ kg m^{-1} en ribbe $l = 10{,}0$ cm wordt in een kubusvormige bak met ribbe $d = 12{,}0$ cm gedaan. In de bak staat een laagje water met hoogte h.
Als de kubus in de bak gedaan wordt blijkt deze te drijven en is het water precies tot aan de rand van de bak gekomen.



De kubus drijft en zorgt ervoor dat de bak net niet overstroomd.

► Hoe hoog moet de aanvankelijke waterhoogte h zijn zodat de bak net niet overstroomd?
De massa van de kubus is:

$$m_\mathrm{k} = \rho_\mathrm{k} l^3 = 0,500 \cdot 10^3 \cdot 0,100^3 = 0,500 \text{ kg}$$

De opwaartse kracht hierop is:

$$F_\mathrm{D} = m_\mathrm{v} g = \rho_\mathrm{water} V_\mathrm{v} g$$

Omdat de kubus drijft weten we ook dat de opwaartse kracht gelijk is aan zijn gewicht:

$$F_\mathrm{D} = m_\mathrm{k} g$$

Combineren we dit dan krijgen we:

$$m_\mathrm{k} g = \rho_\mathrm{water} V_\mathrm{v} g$$

Waaruit volgt dat:

$$V_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{k}}{\rho_\mathrm{water}} = \frac{0,500}{0,998 \cdot 10^3} = 5,01 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

We beseffen ons dat het volume dat het water in neemt gelijk is aan het totale volume min het door de kubus verplaatste stuk:

$$V_\mathrm{water} = V_\mathrm{tot} - V_\mathrm{v} = d^3 - V_\mathrm{v} = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Dit volume water was er dus aanvankelijk ook ofwel:

$$V_{\text{water}} = d^2 h \Rightarrow h = \frac{V_{\text{water}}}{d^2} = \frac{1,23 \cdot 10^{-3}}{0,12^2} = 0,0852 \text{ m}$$

De waterhoogte moet dus 8,52 cm zijn.

Voorbeeld 3.3

Een 50-cent muntje heeft een massa van m = 7,80 g. De straal van het muntje is r = 12,125 mm en de dikte is d = 2,38 mm.
▶ Hoeveel weegt dit muntje onder water?
Als het muntje gezonken is heeft het een volume water verplaatst. Dit volume is:

$$\begin{aligned} V_{\text{v}} &= \pi r^2 d \\ &= \pi(12,125 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2,38 \cdot 10^{-3} = 1,099 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

De opwaartse kracht wordt hierdoor:

$$\begin{aligned} F_{\text{D}} &= \rho V_{\text{V}} g \\ &= 0,998 \cdot 10^3 \cdot 1,099 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81 = 1,076 \cdot 10^{-2} \text{ N} \end{aligned}$$

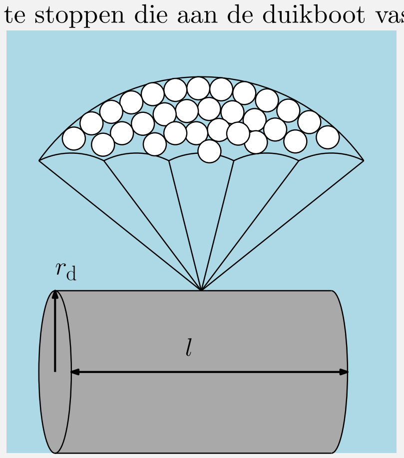
Het netto gewicht van het muntje wordt hiermee:

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= F_{\text{g}} - F_{\text{D}} \\ &= mg - F_{\text{D}} \\ &= 7,80 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 - 1,076 \cdot 10^{-2} = 6,58 \cdot 10^{-2} \text{ N} \end{aligned}$$

Dit is nog maar 85,9% van zijn oorspronkelijke gewicht.

Voorbeeld 3.4

Een duikboot van massa m_{d} = 9,7·10^6 kg is op te vatten als een cilinder met straal r_{d} = 6,2 m en lengte l = 67 m. Deze duikboot is gezonken en men probeert hem door middel van ping-pong-ballen weer te laten drijven. Dit wordt gedaan door de balletjes in een massa-loze parachute te te stoppen die aan de duikboot vast gemaakt is.



Een duikboot wordt door middel van een parachute gevuld met ping-pong-ballen omhoog gehesen.

Een ping-pong-bal heeft een massa van m_p = 2,7 g en heeft een straal van r_p = 20 mm.
► Hoeveel ping-pong-ballen moet men in de parachute "injecteren" om de duikboot net boven water te krijgen?
Op iedere ping-pong-bal werkt een opwaartse kracht van:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{D} &= m_\mathrm{v} g \\ &= \rho V_\mathrm{v} g \\ &= \rho_\mathrm{water} \frac{4}{3}\pi r_\mathrm{p}^3 g \\ &= 0,998 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi 0,020^3 \cdot 9,81 = 0,33 \text{ N} \end{aligned}$$

Per ping-pong-bal is er dus een *effectieve* opwaartse kracht van:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{op} &= F_\mathrm{D} - F_\mathrm{z} \\ &= F_\mathrm{D} - m_\mathrm{p} g \\ &= 0,33 - 2,7 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 0,30 \text{ N} \end{aligned}$$

Op de duikboot werkt, ondanks dat hij gezonken is, nog steeds een opwaartse kracht:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{D} &= m_\mathrm{v} g \\ &= \rho V_\mathrm{v} g \\ &= \rho_\mathrm{water} \pi r_\mathrm{d}^2 l g \\ &= 0,998 \cdot 10^3 \pi 6,2^2 \cdot 67 \cdot 9,81 = 7,9 \cdot 10^7 \text{ N} \end{aligned}$$

De uiteindelijke kracht benodigd om de duikboot boven water te krijgen is:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{net} F_\mathrm{z} &- F_\mathrm{D} \\ &= m_\mathrm{d} g - F_\mathrm{D} \\ &= 9,7 \cdot 10^6 \cdot 9,81 - 7,9 \cdot 10^7 = 1,6 \cdot 10^7 \text{ N} \end{aligned}$$

De uiteindelijke hoeveelheid ping-pong-ballen die nodig is is hiermee:

$$\begin{aligned} n &= \frac{F_\mathrm{net}}{F_\mathrm{op}} \\ &= \frac{1,6 \cdot 10^7}{0,30} = 5,3 \cdot 10^7 \text{ ping-pong-ballen} \end{aligned}$$

Hoofdstuk 4

Vloeistoffen in beweging

Drukverschillen in vloeistoffen zullen voor beweging zorgen. We gaan dit doen aan de hand van *ideale vloeistoffen* in ideale omstandigheden. Wat hiermee bedoeld wordt wordt in dit hoofdstuk duidelijk.

4.1 Compressibiliteit

Een van de eigenschappen van een *ideale vloeistof* is dat deze niet samendrukbaar is. Hiermee wordt bedoeld dat de dichtheid niet zomaar kan variëren per plaats of moment.
In vergelijkingen ziet deze eis er als volgt uit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \vec{x}} = 0 \tag{4.1}$$

en

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{4.2}$$

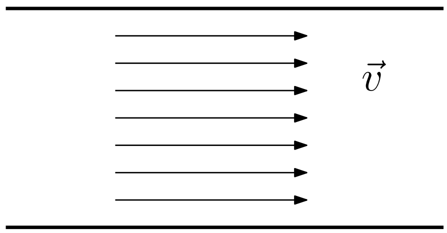
Vloeistoffen als water zijn niet volledig onsamendrukbaar. Water heeft een samendrukbaarheid van $5,1 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}. Dit wil zeggen dat een volume water met een factor $5,1 \cdot 10^{-10}$ afneemt als de druk met 1 Pa toe neemt.
In de praktijk is water dus heel slecht samendrukbaar.

4.2 Viscositeit

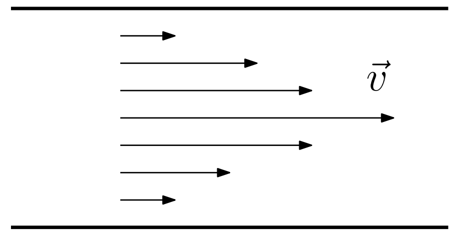
Viscositeit is de mate van kleverigheid van vloeistoffen. In een laminaire stroming (zie paragraaf 4.3) zorgt dit er voor dat de laagjes aan elkaar blijven kleven. Dit zorgt voor wrijving en energieverlies.
Later zullen we nog wel kort bekijken wat voor invloed viscositeit heeft.

4.3 Laminair - turbulent

Bij een *laminaire stroming* is het snelheidspatroon van de stroming opgedeeld in laagjes. Zie figuur 4.1.
Het tegengestelde van een laminaire stroming is een *turbulente stroming*. Hierin is het snelheidspatroon van de deeltjes chaotisch in plaats en tijd, zie figuur 4.2.
Een laminaire stroming kan ook overgaan in een turbulente stroming. Dit effect is goed te zien bij cigarettenrook, zie figuur 4.3.

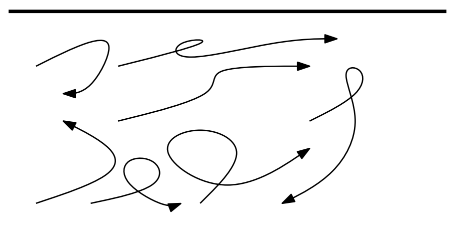


(a) Een niet viskeuze, laminaire stroming.



(b) Een viskeuze, laminaire stroming.

Figuur 4.1: In een laminaire stroming stromen de deeltjes in laagjes met hun eigen snelheidsprofiel.



Figuur 4.2: Een turbulente stroming is chaotisch.

Figuur 4.3: De rook van een sigaar gaat over van laminair naar turbulent.

4.4 Stabiliteit

Bij een *stabiele stroming* is het snelheidspatroon van de deeltjes door een bepaald punt tijdsonafhankelijk. Als ze er op tijdstip $t = 0$ met snelheid $\vec{v}$ doorheen gaan, doen ze dit ook op tijdstip $t = t_1$.

Een *onstabiele stroming* veranderd het snelheidspatroon van de deeltjes door de tijd heen.

4.5 Ideale vloeistoffen

Een ideale vloeistof is een niet samendrukbare, niet viskeuze vloeistof. Of de omstandigheden waarin deze vloeistof stroomt ook ideaal zijn wordt bepaald door de stabiliteit en het snelheidspatroon. Een turbulente stroming is altijd een onstabiele stroming. Andersom hoeft dit niet het geval te zijn. Als de kraan van een tuinslang net aangezet wordt moet de stroming nog op gang komen en is dus onstabiel. De stroming gaat echter wel laminair door de slang. Op de niet bestaande combinatie turbulent-stabiel na, zijn alle combinaties van bovengenoemde eigenschappen te maken.

Voorlopig zullen we kijken naar niet samendrukbare, niet viskeuze (ideale), stabiele, laminaire stromingen.

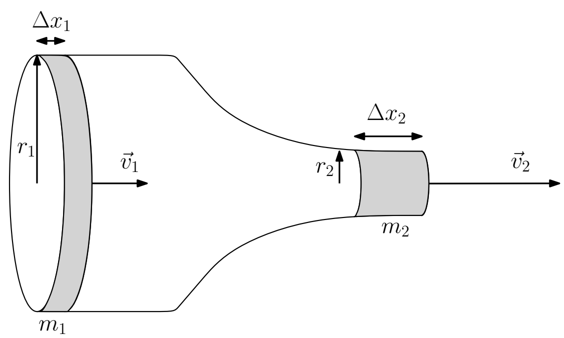
Hoofdstuk 5

De wet van Bernoulli

Nu we weten op welke wijzen vloeistoffen zich kunnen gedragen gaan kijken hoe dit er uit ziet. Dit doen we aan de hand van niet samendrukbare, niet viskeuze, stabiele, laminaire stromingen. We zullen gaan zien hoe vloeistoffen reageren op drukverschillen en wat voor consequenties dit allemaal heeft.

5.1 Massabehoud

Een consequentie van de onsamendrukbaarheid van water is massabehoud. We kijken naar figuur 5.1. We zien een vloeistof door een vernauwing gaan.



Figuur 5.1: De onsamendrukbaarheid van water zorgt ervoor dat de hoeveelheid water die ergens in gaat ook de hoeveelheid water is die er uit gaat.

We bekijken een vloeistof die gedurende een tijd Δt door de buis met straal r_1 stroomt met snelheid v_1.
In deze tijd Δt legt de vloeistof de volgende afstand af:

$$\Delta x = v \ \Delta t$$

Er is in die tijd de volgende hoeveelheid water langs gekomen:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho V \\ &= \rho \Delta x \ \pi r_1^2 \end{aligned}$$

Omdat we weten dat de vloeistof zich niet ophoopt kunnen we stellen dat:

$$m_1 = m_2$$

Ofwel:

$$\rho\ \Delta x\ \pi r_1^2 = \rho\ \Delta x\ \pi r_2^2$$
$$\rho v_1\ \Delta t\ \pi r_1^2 = \rho v_2\ \Delta t\ \pi r_2^2$$

Links en rechts grootheden tegen elkaar wegstrepen levert:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{5.1}$$

Waarin A het oppervlak is waar de stroming doorheen kan. Deze vergelijking wordt de vergelijking voor massabehoud genoemd.
Een vernauwing van de stroming levert dus een verhoging van de snelheid op. Is dit niet het geval dan moet het water zich ergens opeen hopen of uit de stroming verdwijnen.

Het oppervlak maal de stroomsnelheid wordt ookwel *debiet* of in het Engels *volume flow rate* genoemd:

$$Q \equiv Av \tag{5.2}$$

Het debiet heeft eenheid m^3 s^{-1}.

Een effect van massabehoud is een stromende kraan, zie figuur 5.2. Door de toename van de stroomsnelheid vernauwt de stroom zich.

Figuur 5.2: De straal van de kraan wordt smaller omdat de snelheid toeneemt.

Voorbeeld 5.1

Uit een tuinslang met straal r = 0,500 cm komt een debiet van 0,220 L s^{-1}.
▶ Wat is de snelheid van het water?
Het debiet is:

$$Q = 0,200 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{s}^{-1}$$

Hierdoor wordt de snelheid:

$$\begin{aligned} v &= \frac{Q}{\pi r^2} \\ &= \frac{0,200 \cdot 10^{-3}}{\pi 0,00500^2} = 2,80\ \mathrm{m\ s}^{-1} \end{aligned}$$

▶ Met hoeveel % moet de slang afgedicht worden om de snelheid 5,00 m s^{-1} te maken?

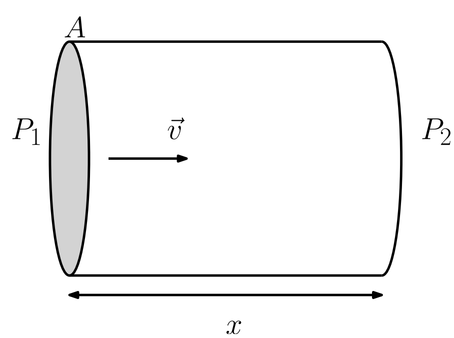
$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{v_1}{v_2} \\ &= \frac{2,80}{5,00} = 0,560 \end{aligned}$$

Het oppervlak is dus 56,0% van het oorspronkelijke oppervlak ofwel het oppervlak is met 44,0% afgenomen.
▶ Wat wordt hiermee de effectieve straal?

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \frac{v_1}{v_2} \\ \pi r_{2,\ \mathrm{eff}}^2 &= \pi r_1^2 \cdot 0,44 \\ r_{2,\ \mathrm{eff}}^2 &= 0,00500^2 \cdot 0,44 \Rightarrow r_{2,\ \mathrm{eff}} = \sqrt{1,1 \cdot 10^{-5}} = 0,332\ \mathrm{cm} \end{aligned}$$

5.2 De snelheid van een stroming

We beschouwen een horizontale buis met een ideale vloeistof welke aan de linker zijde een druk P_1 heeft en aan de rechter zijde een druk P_2, zie figuur 5.3. Hierbij geldt dat $P_1 > P_2$.



Figuur 5.3: Een drukverschil geeft aanleiding tot stroming.

Door het druk verschil zal er een kracht op de vloeistof werken, via vergelijking (1.1)

$$\Delta P = \frac{F}{A}$$

Van de kracht weten we vanuit de mechanica dat geldt:

$$F = ma$$

Combineren we deze vergelijkingen dan krijgen we:

$$\Delta P = \frac{ma}{A}$$

De versnelling van deze stroming valt te schrijven als:

$$a = \frac{v}{t}$$

Hierdoor krijgen we:

$$\Delta P = \frac{mv}{At}$$

"De" massa van de stroming is niet te bepalen. Het is in ons geval makkelijker om te kijken naar de dichtheid van de stroming via vergelijking (2.1). Dit alles bij elkaar levert voor de druk:

$$\Delta P = \frac{\rho V v}{At} = \frac{\rho x v}{t}$$

We weten dat de afgelegde afstand bij een versnelling gegeven wordt door:

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta P = \frac{\frac{1}{2}\rho a t^2 v}{t} = \frac{1}{2}\rho a t v$$

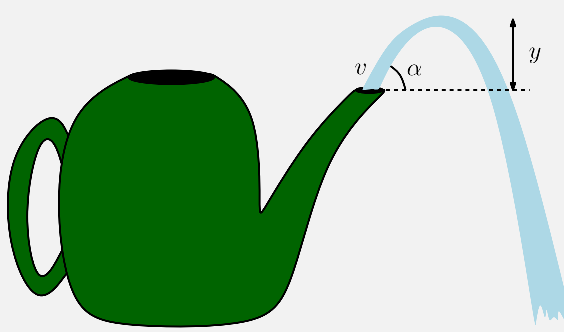
En met de eerdere vergelijking voor de versnelling krijgen we hiermee voor het drukverschil:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{5.3}$$

Voorbeeld 5.2

In een bekende reclame van bedrijf is een man te zien die, door in een theekan te blazen, een glas thee in schenkt. Zie de figuur hieronder:

a: De reclame poster.



b: Schematische weergave van de theepot

We gaan er vanuit dat de hoogte $y = 6{,}0$ cm is en dat de hoek $\alpha = 70°$ is en dat het "waterpijl" in de theepot even hoog is als de tuit.

► Wat is de overdruk van de lucht in de theepot die de man levert?

Voordat we vergelijking (5.3) kunnen gebruiken zullen we eerst achter de snelheid moeten komen.

Deze valt uit te rekenen met wet van behoud van energie:

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= E_\mathrm{z} \\ \frac{1}{2}mv_t^2 &= mgy \\ \frac{1}{2}v_y^2 &= gy \Rightarrow v_y = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,060} = 1,08 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

We weten nu de y-component van de snelheid. Met behulp van de hoek kunnen we de snelheid v berekenen als:

$$v = \frac{v_y}{\sin(\alpha)} = \frac{1,08}{\sin(70°)} = 1,15 \text{ m s}^{-1}$$

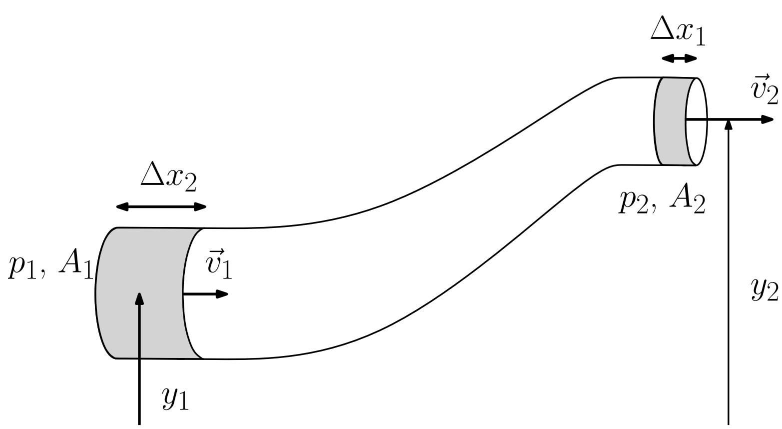
Hiermee kunnen we vergelijking (5.3) invullen:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,998 \cdot 10^3 \cdot 1,15^2 = 6,7 \cdot 10^2 \text{ Pa}$$

De overdruk in de lucht die de man levert is dus 6,7·10^2 Pa.

5.3 De wet van Bernoulli

We beschouwen een ideale stroming welke door een vernauwende buis omhoog gaat, zie figuur 5.4. We zien in dat de stroming langzamer zal gaan omdat deze omhoog gaat, maar hij gaat ook versnellen doordat de buis nauwer wordt. Hoe deze effecten zich tot elkaar verhouden is uit te rekenen met de Bernoullivergelijking. Opgesteld in 1738 door de Zwitserse fysicus en mathematicus Daniël Bernoulli (1700-1782).



Figuur 5.4: De stroming gaat omhoog en vernauwt zich.

Onderaan wordt een arbeid W op de vloeistof uitgeoefend:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

We weten inmiddels dat voor de kracht geldt:

$$\vec{F} = P\vec{A}$$

Dit samen levert:

$$W = PA\Delta x$$

Hierin zijn de vectorpijlen verdwenen omdat $\vec{A}$ en $\vec{s}(=\Delta x)$ in dezelfde richting wijzen.
Per kant kunnen we de totale energie schrijven als:

$$\begin{aligned} W_1 &= P_1 A_1 \Delta x_1 \\ W_2 &= P_2 A_2 \Delta x_2 \end{aligned}$$

Het verschil in arbeid tussen punt 1 en punt twee is negatief. Deze energie is gaan zitten in de kinetische energieverandering, ΔE_k en in de potentiële energieverandering, ΔE_z:[1]

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= \Delta E_\mathrm{k} + \Delta E_\mathrm{z} \\ &= \big(E_{\mathrm{k},2} - E_{\mathrm{k},1}\big) + \big(E_{\mathrm{z},2} - E_{\mathrm{z},1}\big) \end{aligned}$$

Ofwel:

$$\begin{aligned} P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 &= \big(\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2\big) + \big(m_2 g y_2 - m_1 g y_1\big) \\ P_1 V_1 - P_2 V_2 &= \big(\frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2\big) + \big(m_2 g y_2 - m_1 g y_1\big) \\ \big(P_1 - P_2\big) V &= \big(\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2\big) + \big(m g y_2 - m g y_1\big) \end{aligned}$$

Vanwege massabehoud, (5.1), kunnen we stellen dat $V_1 = V_2 = V$ en dat $m_1 = m_2 = m$.
We gaan nu de vergelijking links en rechts delen door het volume. We krijgen zo eigenlijk een vergelijking voor de *energiedichtheid*, de hoeveelheid energie per kubieke meter. Dit is voor vloeistoffen een veel handiger eenheid aangezien er niet over “de” massa gesproken kan worden. Omdat iedere term aan de rechter kant een massa in zich heeft krijgen we hier de massadichtheid terug:

$$P_1 - P_2 = \big(\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2\big) + \big(\rho g y_2 - \rho g y_1\big)$$

Als we kant 1 en 2 bij elkaar groeperen krijgen we de Wet van Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \tag{5.4}$$

De Wet van Bernoulli stelt dus dat de energiedichtheid *in* één, homogene, verbonden stroming (een *communicerend vat*) overal het zelfde is.
Een andere vorm waarin deze vergelijking geschreven wordt is:

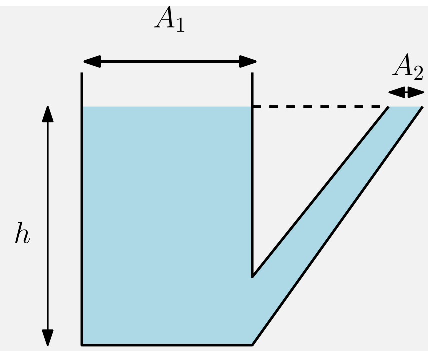
$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constant} \tag{5.5}$$

Dit is een variant van de wet van behoud van energie maar nu voor energiedichtheid.
Merk op dat vergelijkingen (1.2), (2.2) en (5.3) speciale gevallen van de Wet van Bernoulli zijn waarin overige termen weggestreept zijn.

Voorbeeld 5.3

We bekijken nogmaals het probleem van de theepot uit voorbeeld 5.2.

[1] Arbeid is altijd gekoppeld aan een verandering in energie. Vanwege behoud van energie moet het verschil in arbeid ΔW gelijk zijn aan de negatieve energieverandering $-\Delta E$.



Een schematische voorstelling van de theepot.

We gaan er vanuit dat $r_1 = 10{,}0$ cm, $r_2 = 0{,}750$ cm en de snelheid $v_2 = 1{,}60$ m s^{-1}, de hoogte $h = 25$ cm.

► Wat is de benodigde druk in de theepot om de straal er zo uit te laten spuiten?

We beginnen met de wet van Bernoulli en stellen punt 1 aan het wateroppervlak in de pot en doen het zelfde bij de tuit, punt 2. We zien dat de hoogtes gelijk zijn $y_1 = y_2$. Omdat oppervlakte $A_1 \ll A_2$ kunnen we door de vergelijking van massabehoud, (5.1), stellen dat $v_1 \approx 0$. Ofwel:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Aangezien dat $P_2 = P_{\text{omg}}$, het grenst immers rechtstreeks aan de lucht, kunnen we stellen:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$P_1 = 1,013 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 0,998 \cdot 10^3 \cdot 1,60^2 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

► Was onze rechtaanname dat de snelheid $v_1 \approx 0$ correct?

We gebruiken de vergelijking voor massabehoud, (5.1), en checken dit:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} \\ &= 1,60 \frac{0,00750^2}{0,100^2} = 9,00 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dit was dus correct.

► Aangenomen dat v_2 het zelfde blijft, wat is de druk P_1 na 20 s?

We weten dat de snelheid van het water een snelheid $v_1 = 9{,}00 \cdot 10^{-3}$ m s^{-1} heeft. Het water is in 20 s dus een stukje gedaald:

$$\begin{aligned} h' &= v_1 t \\ &= 9,00 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,180 \text{ m} \end{aligned} \tag{5.7}$$

De wet van Bernoulli reduceert nu tot:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h'$$

Ofwel, voor de druk geldt:

$$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h'$$

$$P_1 = 1,013 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 0,998 \cdot 10^3 \cdot 1,60^2 - \frac{1}{2} \cdot 0,998 \cdot 10^3 \cdot (9,00 \cdot 10^{-3})^2 + 0,998 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,180$$
$$= 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

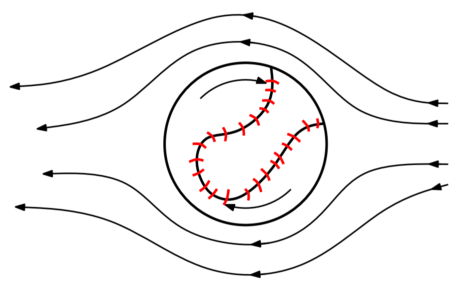
Aanzienlijk meer dan aan het begin.

5.4 Toepassingen

De wet van Bernoulli wordt op tal van plekken toegepast. Hieronder volgen een aantal kwalitatieve voorbeelden.

5.4.1 Honkbal

Pitchers bij honkbal kunnen de bal in hun vlucht laten draaien. Ze doen dit door de bal rond zijn as te laten draaien bij de worp, zie figuur 5.5.



Figuur 5.5: Deze honkbal zal in zijn vlucht omhoog gaan.

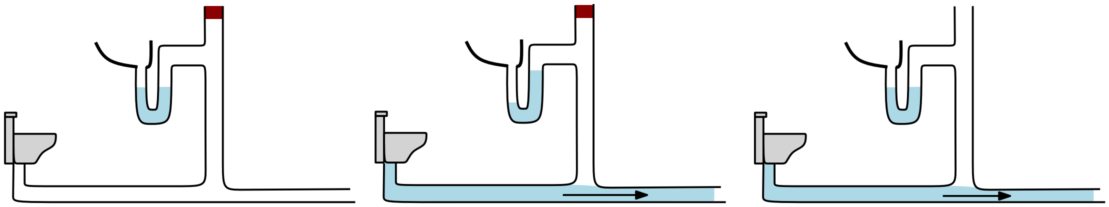
De relatieve snelheid aan de bovenkant van de bal is groter dan aan de onderkant. Boven de bal zal een onderdruk heersen en onder de bal een overdruk. Hierdoor zal de bal omhoog wegdraaien.

5.4.2 Zwanenhals

Een zwanenhals zorgt ervoor dat er geen vervelende afvoer luchtjes in het toilet te ruiken zijn. Als de leiding van de WC en de wasbak echter zonder luchtgat op dezelfde leiding aangesloten zijn zal met het doorspoelen de volgende situatie op kunnen treden, zie figuur 5.6
Het stromende water van de WC zorgt voor een onderdruk in de leiding die omhoog gaat. Hierdoor ontstaat een drukverschil tussen de twee waterniveau's in de zwanenhals van de wasbak. Als het water er hierdoor helemaal uit geduwd wordt moet de zwanenhals eerst opnieuw vol lopen om weer geurtjes tegen te houden.

5.4.3 Plat dak

Huizen met platte daken lopen met sterke wind gevaar, zie figuur 5.7. In het huis waait het niet, waardoor boven het huis een onderdruk ontstaat. Als deze onderdruk te groot is kan het dak van het huis waaien, ondanks dat de wind er niet recht tegenaan blaast.

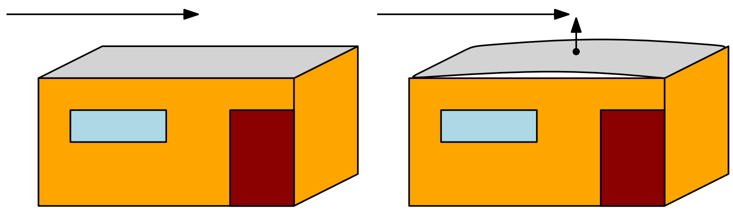


(a) Het water in de zwanenhals van de wasbak staat op gelijke hoogte en voorkomt luchtjes.

(b) De doorspoelende WC zorgt voor onderdruk waardoor het water in de hals uit balans is.

(c) Het weghalen van de stop voorkomt dat de zwanenhals leeg getrokken wordt.

Figuur 5.6: Een doorspoelende WC kan druk op de leidingen zetten.



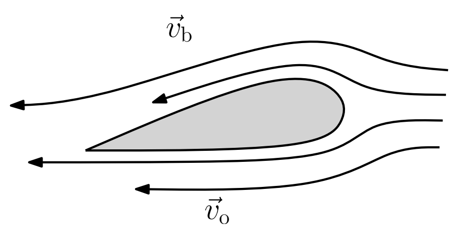
(a) De wind waait over een plat dak.

(b) De overdruk van onder het huis laat het dak bol staan.

Figuur 5.7: Sterke winden kunnen platte daken van huizen af halen

5.4.4 Vleugel

Een vliegtuigvleugel is zo gemaakt dat de stroomsnelheid van de lucht bovenlangs v_b groter is dan de stroomsnelheid onderlangs, v_o, zie figuur 5.8.

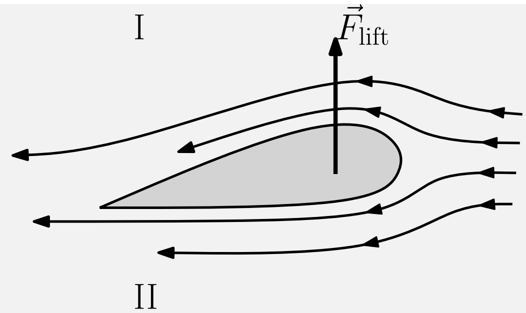


Figuur 5.8: De lucht stroomt boven en onder niet even snel langs de vleugel.

Hierdoor ontstaat een drukverschil tussen de boven en onderkant van de vleugel. De druk aan de bovenkant wordt lager dan die aan de onderkant. Hierdoor ontstaat een *liftkracht* welke de vleugel omhoog duwt.
Dit is echter niet het hele verhaal. Anders zouden vliegtuigen niet ondersteboven kunnen vliegen.

Voorbeeld 5.4

Een Cesna vliegtuig heeft een massa van $m = 1066$ kg en een vleugeloppervlak van $A = 16{,}07\ \mathrm{m}^2$. De cruise snelheid van het vliegtuig is $v_\mathrm{cruise} = 58{,}33\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, en de maximumsnelheid is $v_\mathrm{max} = 66{,}11\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.



Door het snelheidsverschil is er een liftkracht omhoog.

► Hoe groot moet het snelheidsverschil zijn om het vliegtuig te laten zweven?
Het benodigde drukverschil hiervoor is

$$\Delta P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{1066 \cdot 9,81}{16,07} = 650,7 \text{ Pa}$$

Hiervoor hebben we de volgende snelheden nodig:

$$\Delta P = P_{\text{II}} - P_{\text{I}} = \frac{1}{2}\rho v_{\text{I}}^2 - \frac{1}{2}\rho v_{\text{II}}^2$$

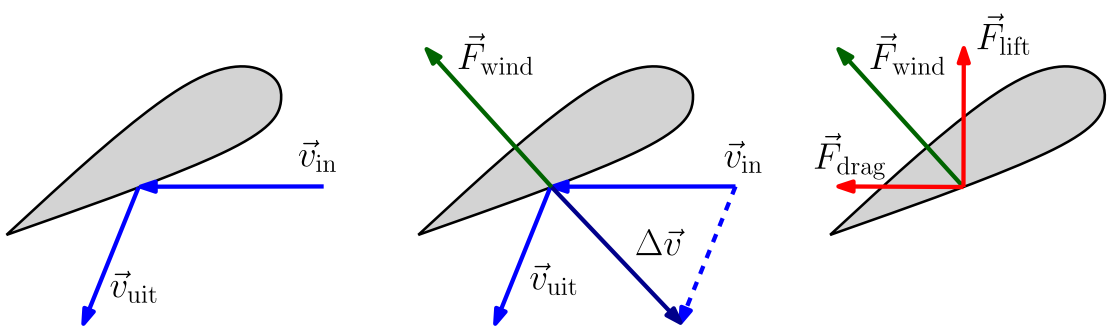
Let hierbij goed op de volgorde van de indices I en II!
Voor v_{II} vullen we de cruise snelheid in en lossen we op voor v_{I} dan krijgen we:

$$v_{\text{I}} = \sqrt{\frac{\Delta P + \frac{1}{2}\rho v_{\text{II}}^2}{\frac{1}{2}\rho}} = \sqrt{\frac{650,7 + \frac{1}{2} \cdot 1,293 \cdot 58,33^2}{\frac{1}{2} \cdot 1,293}} = 66,40 \text{ m s}^{-1}$$

Hiermee wordt het snelheidsverschil tussen boven en onder gelijk aan:

$$v_{\text{I}} - v_{\text{II}} = 66,40 - 58,33 = 8,07 \text{ m s}^{-1}$$

Het snelheidsverschil uit het voorgaande voorbeeld lijkt klein maar is in de praktijk niet altijdhaalbaar met vleugels. Bovendien weten we ook dat vliegtuigen ondersteboven kunnen vliegen.
Om toch genoeg liftkracht te krijgen wordt de vleugel schuin in de luchtstroomgezet, zie de figuur 5.9

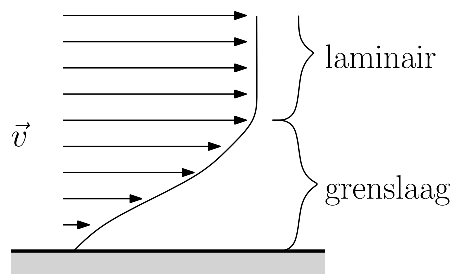


Figuur 5.9: Om een vliegtuig te laten vliegen wordt de vleugel schuin in de wind gezet.

De lucht komt aan met de snelheid en richting van v_{in} en verlaat de vleugel met snelheid en richting v_{uit}. Het snelheidsverschil, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\text{uit}} - \vec{v}_{\text{in}}$ heeft een richting recht op de vleugel.
De vleugel buigt de wind dus terug met een kracht $\vec{F}$ in de richting van $\Delta\vec{v}$. Door de Derde wet van Newton weten we dat dan de wind ook een zelfde maar tegengestelde kracht $\vec{F}_{\text{wind}}$ op

de vleugel.
Deze kracht kan ontbonden worden in twee componenten, horizontaal en vertikaal. Dit zijn respectievelijk de remkracht, F_{drag}, en de liftkracht, F_{lift}.

Deze kracht in combinatie met de liftkracht leveren *samen* genoeg kracht om het vliegtuig te laten vliegen.
Bij het landen ziet men duidelijk hoe het effect van liftkracht weggenomen wordt. Zodra een vliegtuig met de wielen de grond raakt worden er over de lengte van de vleugen "flappen" omhooggezet. Deze flappen verbreken de zogenoemde *grenslaag*. De grenslaag is de laag waar de lucht zich viskeus, laminair gedraagt. Het is de laag waar de lucht aan de vleugel blijft kleven, zie figuur 5.10.

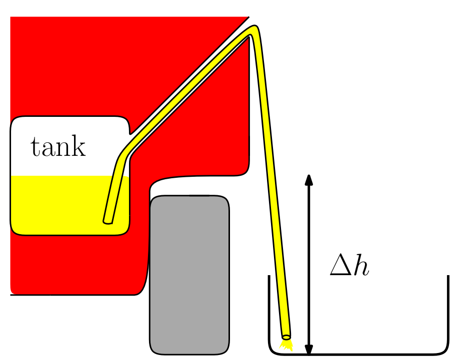


Figuur 5.10: De grenslaag is de laag waarin de vloeistof of lucht zich viskeus gedraagt.

Zodra de grenslaag verbroken is wordt de stroming om de vleugen heel erg turbulent. Door het wegvallen van het laminaire stromingsprofiel wordt ook de liftkracht weggenomen. Hierdoor is het vliegtuig makkelijker tegen de grond te houden.

5.4.5 Hevelen

Hevelen is oude manier om vloeistof uit een reservoir met hoge wanden te krijgen naar een lager gelegen reservoir zonder gebruik te maken van een pomp.
Het wordt veel gebruikt om benzine uit de tank van een auto te laten stromen. De benzine moet hiervoor wel eerst omhoog, de tank uit, voordat het lager in het reservoir kan, zie figuur 5.11.



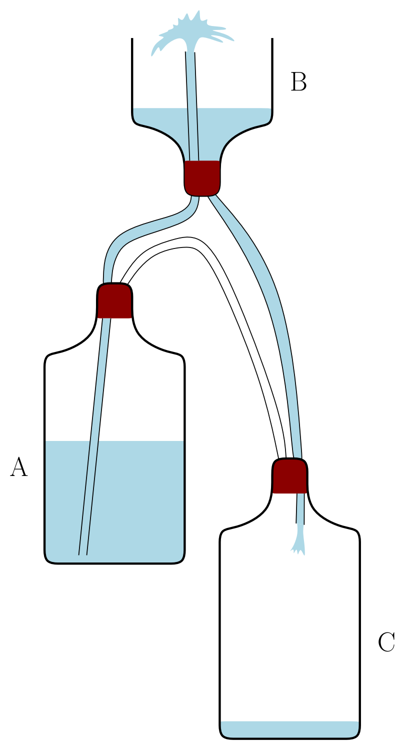
Figuur 5.11: Benzine wordt zonder pomp uit de tank geheveld.

Het is hier bij hevelen wel van belang dat de slang waarmee geheveld wordt geen lucht bevat. In dat geval is er geen sprake van een communicerend vat en gaat de Wet van Bernoulli niet op. Wat we zien is dat de benzine eigenlijk effectief een hoogte Δh omlaag valt. Dit doet het met

een omweg, het gaat eerst omhoog. Het omhoog stromen van het water (wat energie kost) wordt later gecompenseert omdat het uiteindelijk *netto* naar beneden valt. Dit kan alleen in een communicerend vat.
Omdat we zien dat het water eerst omhoog gaan betekent dit dat er in de tank blijkbaar een overdruk heerst ten opzichte van het hoogste punt. Deze drukken zijn uit te rekenen met de Wet van Bernoulli voor verschillende plekken in de slang.
Dit hevelen gaat door totdat de tank leeg is, of tot er geen hoogteverschil Δh meer is tussen de twee vloeistofoppervlakten.

5.4.6 Fontijn van Heron

Heron van Alexandrië (10-70) was een Griekse wis- en natuurkundige en uitvinder. Hij bestudeerde de luchtdruk en ontwierp onder andere de eerste stoommachine. Hij vond ook een manier om een fontijn te maken waar geen pomp voor nodig was. De werking van deze *fontijn van Heron* is gebaseerd op het principe van hevelen. Een schematische afbeelding van de fontein is weergegeven in figuur 5.12.



Figuur 5.12: De fontijn van Heron maakt gebruik van lucht- en waterdruk om, zonder pomp, water te spuiten.

In de beginopstelling zit fles A vol water en de andere twee niet. Om de fontijn te starten wordt er water in bak B gegooid. Dit stroomt meteen omlaag door een slang naar fles C. De luchtdruk in deze fles wordt hierdoor hoger. Omdat flessen A en C via een luchtslang met elkaar kunnen communiceren, maar niet met de buitenlucht, wordt ook de luchtdruk in A hoger. Hierdoor wordt er water in de slang van fles A steeds verder omhoog geduwd. Zo hoog dat dit water er bij B uit spuit, het reservoir vult en zo krijgen we een blijvend werkende fontijn.
De vraag of deze fontijn oneindig lang door blijft gaan laat ik aan de lezer over.

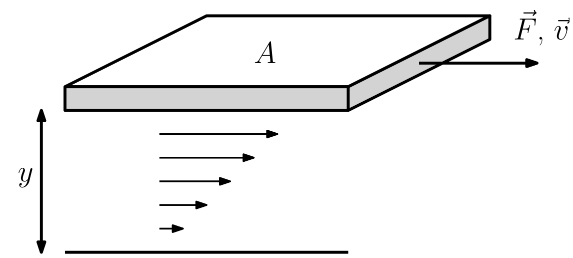
Hoofdstuk 6

Viscositeit

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot ideale vloeistoffen in ideale omstandigheden. We zullen nu kort gaan kijken naar viskeuze vloeistoffen in ideale omstandigheden. Daarvoor gaan we eerst kijken wat viscositeit is.
Daarna kijken we wat voor invloed viscositeit op een stroming heeft.

6.1 Viscositeit

Kortgezegd is *viscositeit* de "stroperigheid" van de vloeistof. Laagjes binnen viskeuze stromingen blijven deels aan elkaar plakken.
We bekijken een stilstaand laagje viskeuze vloeistof, nu gaan we van bovenaf een kracht, $\vec{F}$, op het vlak, A, naar rechts uit oefenen tot er een constante snelheid, $\vec{v}$, ontstaat, zie figuur 6.1.



Figuur 6.1: De viskeuze laagjes plakken aan elkaar.

De onderste laag zal viskeus aan de bodem blijven plakken. Tegelijkertijd blijft de bovenste laag aan het oppervlak plakken. Hierdoor ontstaat een laminair snelheidsprofiel.
De kracht om de snelheid constant te houden wordt gegeven door:

$$F = \eta \frac{Av}{y} \tag{6.1}$$

Hierin is:
- η: de viscositeit in pascal seconde (Pa s).
- A: het oppervlak van het vlak in vierkante meter (m^2).
- y: de hoogte van het vlak tot de bodem in meter (m).

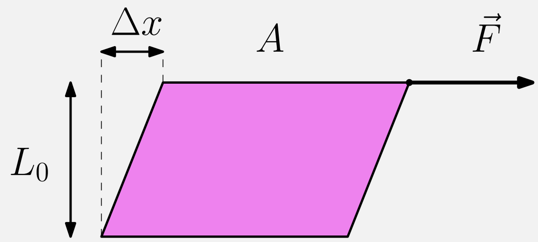
Hoe groter de viscositeit, hoe groter de benodigde kracht voor een constante snelheid
In tabel 6.1 staat een lijstje met veel voorkomende stoffen en hun viscositeit bij een temperatuur van $T = 293$ K.

Stof	η [Pa s] (T = 293 K)
Water	$1{,}0{\cdot}10^{-3}$
Silliconenolie	$0{,}49{\cdot}10^{-3}$
Kwik	$1{,}55{\cdot}10^{-3}$
Melk	$2{,}1{\cdot}10^{-3}$
Olijfolie	$84{\cdot}10^{-3}$
Paraffine-olie	1,00
Lucht	$1{,}8{\cdot}10^{-5}$

Tabel 6.1: De viscositeit van veel voorkomende stoffen.

Intermezzo

Viscositeit lijkt in zekere zin heel erg veel op de *shear modulus* uit de mechanica.
We bekijken een blok gelatine waarop van boven een kracht, $\vec{F}$, naar rechts werkt. Deze kracht vervormd het blok waardoor deze over een afstand, Δx gaat overhangen, zie de figuur hieronder.



Een blok gelatine vervormd door een schuifkracht.

De schuifkracht voor deze overhang wordt gegeven door:

$$F = S\frac{\Delta x}{L_0}A \tag{6.2}$$

Hierin is:
S: de shear modulus in newton per vierkante meter (N $\mathrm{m^{-2}}$).
L_0: de lengte van het grondvlak in meter (m).
A: het oppervlak van het vlak waarop de kracht werkt in vierkante meter ($\mathrm{m^2}$).

6.2 Vallende voorwerpen

Een voorwerp, in dit geval een balletje, dat onder water valt zal te maken krijgen met een viskeuze wrijvingskracht. Deze wrijvingskracht volgt uit de Navier-Stokes vergelijkingen, waar we hier niet op in zullen gaan, en is te berekenen als:

$$F_{\text{visc}} = 6\pi r\eta v_{\text{t}} \tag{6.3}$$

Dit wordt ook wel de *Wet van Stokes* genoemd. Vernoemd naar de Britse wis- en natuurkundige Sir George Stokes (1819-1903) welke deze wet in 1851 opstelde.
Hierin is:
r: de straal van het balletje in meters (m).
η: de viscositeit in pascal seconde (Pa s).
v_{t}: de eindsnelheid van het balletje in meters per seconde (m $\mathrm{s^{-1}}$).

Als een balletje met massa m_{b} en straal r in een vloeistof met dichtheid ρ_{v} en viscositeit η valt zal deze al vrij snel zijn (maximale) eindsnelheid of *terminal velocity*, v_t, berijken. De zwaartekracht is op dat moment even groot als de opwaartsekracht en een viskeuze wrijvingskracht:

$$\begin{aligned} F_z &= F_{visc} + F_D \\ m_b g &= 6\pi r \eta v_t + m_v g \\ \rho_b \frac{4}{3}\pi r^3 g &= 6\pi r \eta v_t + \rho_v \frac{4}{3}\pi r^3 g \end{aligned}$$

Hierin is ρ_b de massadichtheid van het balletje.
Lossen we dit op voor v_t dan krijgen we:

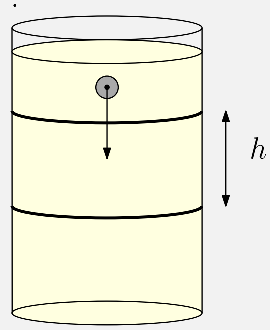
$$v_t = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_b - \rho_v)}{6\pi r \eta}$$

Als we dit vereenvoudigen komen we op:

$$v_t = \frac{2}{9}\frac{r^2 g(\rho_b - \rho_v)}{\eta} \tag{6.4}$$

Voorbeeld 6.1

Een balletje met straal $r = 0{,}500$ cm valt met constante snelheid door paraffine-olie naar beneden. De hoogte $h = 20{,}0$ cm wordt in $\Delta t = 0{,}519$ s afgelegd. De dichtheid van paraffine-olie is $0,800 \cdot 10^3$ kg m^{-3}.



Een balletje valt met constante snelheid in paraffine-olie.

▶ Wat is de massa van het balletje?
Allereerst zullen we de eindsnelheid uitrekenen:

$$v_t = \frac{h}{\Delta t} = \frac{0,200}{0,519} = 0,385 \text{ m s}^{-1}$$

Nu kunnen we met behulp van vergelijking (6.4) de dichtheid van het balletje uitrekenen:

$$9\eta v_t = r^2 g(\rho_b - \rho_{par})$$

Ofwel:

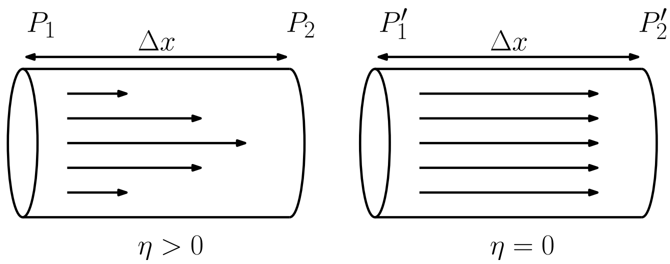
$$\rho_b = \frac{9\eta v_t}{2r^2 g} + \rho_{par} = \frac{9 \cdot 1,00 \cdot 0,385}{2 \cdot 0,00500^2 \cdot 9,81} + 0,800 \cdot 10^3 = 7,86 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Hiermee kunnen we met behulp van vergelijking (2.1) de massa berekenen:

$$m_\mathrm{b} = \rho_\mathrm{b} V = \rho_\mathrm{b} \frac{4}{3}\pi r^3 = 7,86 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3}\pi 0,00500^3 = 4,12 \text{ g}$$

6.3 De Hagen-Poiseuille vergelijking

Als viskeuze vloeistoffen door buizen stromen zal hierop een wrijvingskracht werken. Over langs afstanden kan dit voor behoorlijk wat energieverlies zorgen. Door dit energieverlies zal de kinetische energie van de stroming afnemen, zie figuur 6.2



Figuur 6.2: Het verschil tussen viskeuze en niet-viskeuze vloeistoffen door buizen.

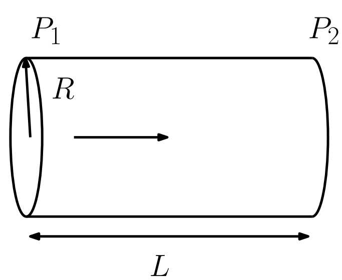
Als de vloeistof niet viskeus is zijn de drukken links en rechts gelijk:

$$P_1' = P_2'$$

Bij viskeuze vloeistoffen is dit niet het geval, hier zal gelden:

$$P_1 > P_2$$

We gaan kijken naar het debiet door een buis met straal R en lengte L waar een viskeuze vloeistof met viscositeit η doorheen stroomt, zie figuur 6.3.



Figuur 6.3: Een viskeuze vloeistof stroomt door een buis.

Het totale debiet over afstand L door een buis met straal R wordt gegeven door:

$$Q = \frac{\pi R^4 \left(P_1 - P_2\right)}{8\eta L} \tag{6.5}$$

In 1838 en 1839 leidden respectievelijk de Franse fysicus Jean Léonard Marie Poiseuille (1797-1869) en de Duitse fysicus Gotthilf Hagen (1797-1884) deze wet af door middel van het doen van experimenten. Zij bevestigden deze wet dus eigenlijk meer dan dat ze hem afleidden. Omdat Poiseuille deze als eerste in 1840 publiceerde staat de wet ook wel bekend als de *Wet van Poiseuille*.

Voorbeeld 6.2

In olieraffinaderijen moet de olie vaak over grote afstanden getransporteerd worden. Hierbij is vicositeit een belangrijke beperking in het debiet.
De olie wordt getransporteerd over een afstand van 1,5 km door leidingen met een straal van 20 cm. De olie heeft een viscositeit van $\eta = 0{,}319$ Pa s. Het wordt met een overdruk van $\Delta P = 1,0{\cdot}10^4$ Pa in de leiding gepompt en het moet er minimaal met omgevingsdruk uit komen.
► Hoeveel % olie komt er minder door de leidingen door viskeuze verliezen?
Allereerst rekenen we het debiet uit voor viskeuze olie:

$$Q = \frac{\pi R^4 \big(P_1 - P_2\big)}{8\eta L} = \frac{\pi 0,20^4 \cdot 1,0 \cdot 10^4}{8 \cdot 0,319 \cdot 1,5 \cdot 10^3} = 0,013 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Nu zonder viscositeit. De snelheid van de olie is te berekenen met vergelijking (5.3):

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,0 \cdot 10^4}{0,998 \cdot 10^3}} = 4,48 \text{ m s}^{-1}$$

Nu kunnen we met vergelijking (5.2) het debiet uitrekenen:

$$Q = vA = 4,48 \cdot \pi r^2 = 4,48 \cdot \pi 0,20^2 = 0,56 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

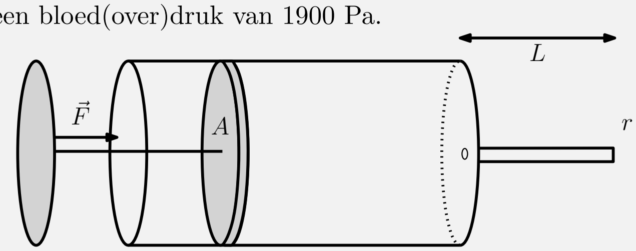
Met viscositeit blijft er het volgende percentage van het debiet over:

$$\frac{Q_{\text{visc}}}{Q_{\text{non-visc}}} = \frac{0,013}{0,56} \cdot 100\% = 2,3\%$$

Er komt dus 97,7% minder door de leidingen door viskeuze effecten.
► Hoe kunnen we deze verliezen beperken?
Als we kijken naar vergelijking (6.5) zien we dat we ofwel de straal, R, groter moeten maken of de olie in een rechtere lijn van A naar B transporteren wat resulteert in een kleinere L.

Voorbeeld 6.3

Een injectienaald wordt gebruikt om een vloeistof in een patiënt te injecteren. De dokter moet hiervoor een kracht van $F = 0{,}30$ N uitoefenen op een spuitoppervlak van $A = 8{,}5{\cdot}10^{-5}$ m^2. De vloeistof waarmee de patiënt geïnjecteerd wordt heeft een viscositeit van $\eta = 1{,}6{\cdot}10^{-3}$ Pa s.
De injectienaald heeft een lengte van $L = 3{,}0$ cm en de opening heeft een straal van $r = 3{,}5{\cdot}10^{-4}$ m.
De patiënt heeft een bloed(over)druk van 1900 Pa.



Een spuit injecteert vloeistof in de patiënt.

► Hoeveel mL vloeistof wordt er in 2,5 s geïnjecteerd?

We zullen uiteindelijk het debiet uit moeten gaan rekenen met vergelijking (6.5). Hierbij zien we dat druk P_2 gelijk moet zijn aan:

$$P_2 = P_{\text{omg}} + \Delta P = 1,013 \cdot 10^5 + 1900 = 1,032 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

We moeten nu dus eerst druk P_1 uitrekenen. Dit doen we met behulp van vergelijking (1.3):

$$\Delta P = \frac{F}{A} = \frac{0,30}{8,5 \cdot 10^{-5}} = 3,5 \text{ kPa}$$

Hiermee wordt druk P_1:

$$P_1 = P_{\text{omg}} + \Delta P = 1,013 \cdot 10^5 + 3,5 \cdot 10^3 = 1,048 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Hiermee kunnen we vergelijking (6.5) uitrekenen:

$$Q = \frac{\pi R^4 \big(P_1 - P_2\big)}{8\eta L} = \frac{\pi \cdot (3,5 \cdot 10^{-4})^4 \big(1,048 \cdot 10^5 - 1,032 \cdot 10^5\big)}{8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,030} = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Dit betekent dat er in 2,5 s het volgende volume geïnjecteerd wordt:

$$\Delta V = Q \Delta t = 2,0 \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

Dit is een hoeveelheid van 0,50 mL.

Index