

Collegedictaat mechanica 2

Karel Kok - 20 april 2017



Dit is de eerste opzet voor het dictaat voor het vak mechanica 2 wat in het eerste kwartaal van 2014-2015 aan de HAN gegeven wordt. Dit dictaat is geenzins af en kan (en zal) ongetwijfeld (spel)fouten bevatten. Zorg dus dat je kritisch leest!

Om de kwaliteit van dit dictaat te verbeteren vraag ik iedereen fouten door te mailen naar karel.kok@gmail.com, vermeld hierbij ook het paragraafnummer.



Tenzij anders vermeld is alles in dit werk gelicenceerd onder een Creative Commons BY-SA 4.0-licentie. De volledige licentie-tekst is te lezen op: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>. Wanneer je gebruik wilt maken van dit werk, hanteer dan de volgende methode van bronvermelding:

Karel Kok, *Collegedictaat mechanica 2* (2017), CC BY-SA 4.0 gelicenceerd. Alle afbeeldingen en foto's zijn, tenzij anders aangegeven, gemaakt door Karel Kok.

Dit dictaat is gemaakt met behulp van L^AT_EX.

Inhoudsopgave

1	Vectoren en scalairen	1
1.1	Overeenkomsten en verschillen	1
1.2	Vectoren tekenen	1
1.3	Vectoren ontbinden	2
1.4	Vectoren optellen	3
1.5	Scalair vermenigvuldigen	4
1.6	Vectoren vermenigvuldigen	4
1.6.1	Inproduct	5
1.6.2	Uitproduct	6
2	Bewegingen	9
2.1	Snelheid	9
2.2	Versnelling	10
2.3	Bewegingen in twee dimensies	13
3	Krachten	15
3.1	Eerste wet van Newton	15
3.2	Tweede wet van Newton	16
3.3	Derde wet van Newton	16
3.4	Gravitatiekracht	19
3.5	Normaalkracht	21
3.6	Tekenen van krachten	22
3.7	Wrijvingskracht	22
4	Cirkelbewegingen	25
4.1	Middelpuntzoekende kracht	25
4.2	Opstaande bochten	29
5	Energie	33
5.1	Arbeid	33
5.1.1	Niet constante krachten	34
5.2	Potentiële energie	35
5.2.1	Zwaarte-energie	36
5.3	Kinetische energie	38
5.4	Energiebehoud	38
5.5	Gravitatie energie	40
5.6	Vermogen	42

6	Impuls	45
6.1	De impulsvergelijking	45
6.2	Impulsbehoud	47
6.3	Elastische botsingen	48
6.3.1	Kogelbotssysteem	51
6.4	Inelastische botsingen	52
6.5	Center of Mass	55
6.5.1	Zwaartepunt	55
6.5.2	Elastisch	56
6.5.3	Inelastisch	58
6.6	Botsingen in meerdere richtingen	59
7	Rotatiebewegingen	61
7.1	Poolcoördinaten	61
7.2	Rotatie kinematica	63
7.2.1	Hoeksnelheid	63
7.2.2	Hoekversnelling	63
7.3	Omrekenen	67
7.3.1	Versneld draaien	69
8	Rotatie dynamica	73
8.1	Moment	73
8.2	Evenwicht	75
8.2.1	Hefbomen	76
8.2.2	Katrollen	81
8.3	Traagheidsmoment	83
8.4	Rotatie-energie	91
8.5	Impulsmoment	94
8.5.1	Impulsmoment stoot	97
8.5.2	Gyroscoop	98

Hoofdstuk 1

Vectoren en scalaires

In de natuurkunde komen grootheden in twee verschillende “*smaken*” voor vectoren en scalaires. Het verschil is ogenschijnlijk simpel; vectoren hebben een richting, scalaires niet. De overeenkomst is dat ze beiden wel een grootte en een eenheid hebben.

1.1 Overeenkomsten en verschillen

Voorbeelden van vectoren zijn: snelheid, kracht, magnetisch veld etc.

Voorbeelden van scalaires zijn: massa, tijd, lading, energie etc. Een lastiger voorbeeld is warmte.

Warmte stroomt van de plek met een hoge temperatuur naar een plek met een lage temperatuur, je zou kunnen zeggen dat warmte dus een richting heeft. Toch is dit niet het geval.

Stroom is ook een scalair, ondanks dat de elektronen een bepaalde kant op bewegen. Als we kijken naar de formule voor de stroom: $I = \Delta Q / \Delta t$ zien we dat stroom geen richting kan hebben, lading en tijd hebben immers geen richting. Als de rechter kant van de vergelijking geen richting heeft, kan de linker kant dat natuurlijk ook niet hebben. Sterker nog, ze *hebben* niet alleen een richting ze hebben *dezelfde* richting.

In de natuurkunde schrijven we vectoren traditioneel met een pijltje erboven \vec{v} , een andere schrijfwijze is de grootte **dik** te drukken, \mathbf{v} .

1.2 Vectoren tekenen

Vectoren kunnen we voorstellen als een pijl. De pijl heeft een kop, waar het “puntje” zit en een staart, waar de pijl begint.

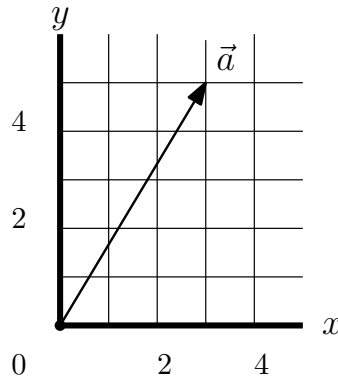
Een vector kan wijzen naar een coördinaat, $\vec{a} = (a_x; a_y)$, zie figuur 1.1.

De lengte van pijl geeft de *waarde* van de vector aan. Deze berekenen als volgt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \dots + a_n^2} \quad (1.1)$$

Waarbij n het aantal dimensies van de vector aangeeft. In dit geval zullen we meestal met twee dimensies werken (x en y).

De waarde van de vector wordt in de natuurkunde vaak gewoon geschreven als a . Zonder de absolutewaarde strepen en het vectorpijltje.



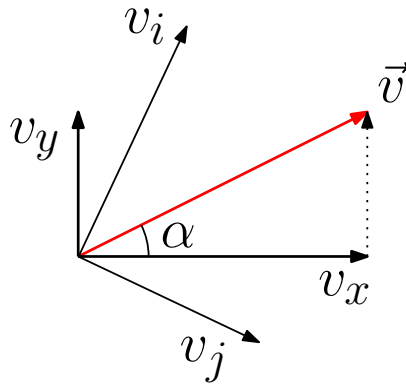
Figuur 1.1: Een vector in het x - y -vlak.

1.3 Vectoren ontbinden

Vectoren hebben een richting, soms is deze richting niet helemaal handig. Stel je bijvoorbeeld een voetbal voor die schuin omhoog geschoten wordt. De snelheidsvector kunnen we dan ontbinden in twee richtingen, zie figuur 1.2. We kiezen deze richtingen altijd slim. Dat wil zeggen in twee richtingen die *loodrecht* op elkaar staan en zodanig dat de twee richtingen samen vallen met voor ons handige richtingen. In het geval van de voetbal zullen dit de horizontale- en verticale richting zijn.

De snelheid heeft dus een *component* in de x - en in de y -richting, v_x en v_y .

Zodra we de richtingen gekozen hebben gaan we de te ontbinden vector projecteren op deze



Figuur 1.2: De snelheid van een voetbal ontbonden in twee richtingen. v_x en v_y zijn de handigste keuze, echter v_i en v_j zijn ook valide keuzen.

richtingen. De projecties op deze richtingen vormen de nieuwe ontbonden vectoren. Doordat de twee ontbonden vectoren loodrecht op elkaar staat is het automatisch zo dat de twee vectoren bij elkaar opgeteld weer de oude vector op leveren.

Meestal zijn de x - en y richting de meest handige richtingen, zij vallen samen met resp. de horizontale en verticale beweging. Dit zal later een handige richting blijken omdat de zwaartekracht alleen in de y -richting werkt.

Merk op dat v_i en v_j ook netjes ontbonden snelheden van \vec{v} zijn, ze zijn echter niet handig gekozen.

Let wel dat v_x en v_y geen vectorpijltjes meer hebben. Ze geven de waarde en eenheid van de vector in de richting van de index aan.

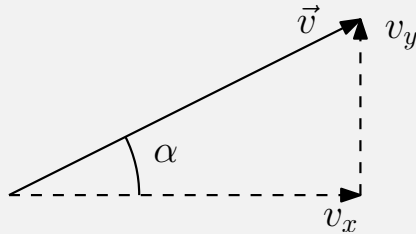
Voorbeeld 1.1

We weten dat $\vec{v}=15,0$ m/s en $\alpha=17,0^\circ$ tov de horizontaal.

► Wat is de waarde van v_x en v_y ?

We weten uit goniometrie: $v_x = \vec{v} \cos(\alpha) = 14,3$ m/s

$v_y = \vec{v} \sin(\alpha) = 4,39$ m/s



De snelheid \vec{v} ontbonden in twee componenten.

Uiteraard volgt hier weer uit dat:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

waarbij hier v uitgerekend wordt en niet \vec{v} omdat het hier om de waarde van v gaat en de richtingsinformatie verloren is gegaan.

De richting kan alsnog berekend worden:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

1.4 Vectoren optellen

Vectoren kunnen ook bij elkaar opgeteld worden. Op papier gebruiken we de *kop-staart methode*. We beginnen met een vector en schuiven de volgende vector met zijn staart op de kop van de vorige. Zie figuur 1.3.

In figuur 1.3b zien we de vier vectoren kop-staart opgeteld in volgorde: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. De resulterende vector is de rode pijl.

In figuur 1.3c hebben we de vectoren in een andere volgorde opgeteld: $\vec{a} + \vec{d} + \vec{b} + \vec{c}$. De resulterende vector is echter het zelfde.

Vectoren zijn dus *commutatief*, de som levert ongeacht de volgorde iedere keer het zelfde op.

In formule vorm tellen we de vectoren als volgt bij elkaar op:

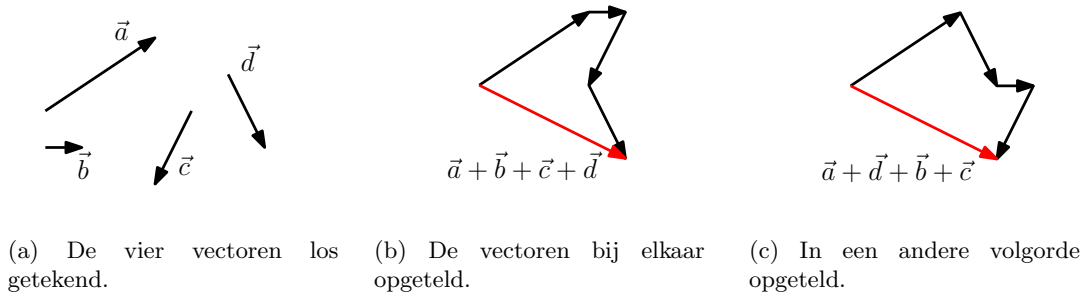
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x; a_y) + (b_x; b_y) = (a_x + b_x; a_y + b_y) \quad (1.2)$$

Dit is visueel gemaakt in figuur 1.4.

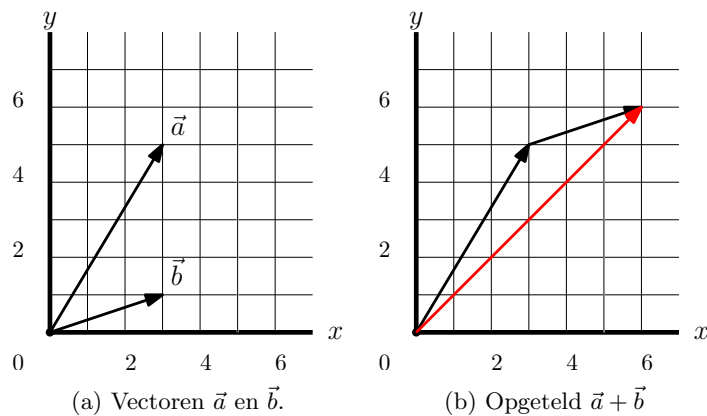
We zien hierin vectoren $\vec{a} = (3; 5)$ en $\vec{b} = (3; 1)$. Als we deze vectoren optellen volgens vergelijking (1.2) krijgen we:

$$(3; 5) + (3; 1) = (6; 6)$$

Dit is precies het coördinaat wat de rode pijl van figuur 1.4b laat zien.



Figuur 1.3: Vier vectoren opgeteld door middel van kop-staart methode. De volgorde van het optellen van vectoren maakt niet uit.



Figuur 1.4: Twee vectoren bij elkaar optellen.

1.5 Scalair vermenigvuldigen

We kunnen vectoren met scalaren vermenigvuldigen. Een scalaire vermenigvuldiging van scalair p met vector \vec{a} is gedefiniëerd als:

$$p\vec{a} = p(a_x; a_y; \dots; a_n) \equiv (pa_x; pa_y; \dots; pa_n) \quad (1.3)$$

Als vector $\vec{a} = (1; 2)$ dan is $3\vec{a} = (3; 6)$.

Dit is visueel gemaakt in figuur 1.5.

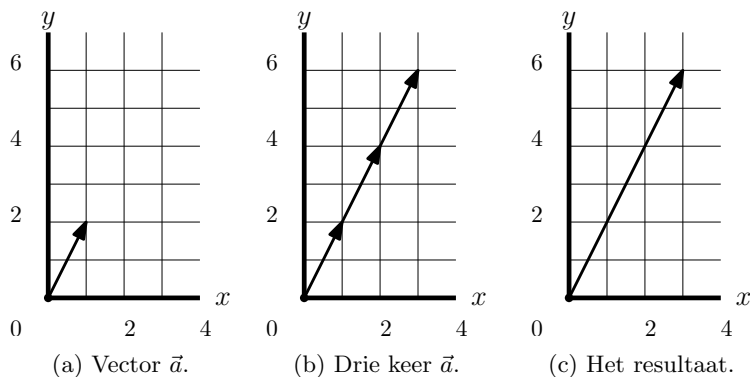
Scalair vermenigvuldigen verandert dus niets aan de richting. De vectoren links en rechts van het gelijkheidsteken hebben dezelfde richting.

1.6 Vectoren vermenigvuldigen

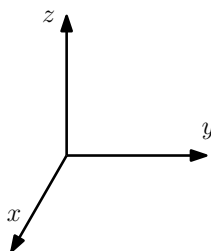
Vectoren kunnen op twee manieren met elkaar vermenigvuldigd worden, via een *inproduct* of via een *uitproduct*.

Bij een inproduct levert de vermenigvuldiging een scalair op en bij het uitproduct een vector en bij het uitproduct een vector.

Vooraf spreken we af dat we zullen werken in een *rechtshandig* assenstelsel, zoals weergegeven in figuur 1.6. Met rechtshandig wordt bedoeld dat, als je je duim langs de x -as en je je wijsvinger langs de y -as legt, je middelvinger de z -as aan zal geven.

Figuur 1.5: Scalaire vermenigvuldiging van $a\vec{a}$.

Dit assenstelsel noemen we een *Cartesisch coördinatenstelsel*. Vernoemd naar de 17^e eeuwse Franse Natuurfilosoof René Decartes (1596-1650). Dit coördinatenstelsel werkt met lineaire x -, y -, en z -richtingen welke allen loodrecht op elkaar staan. Zeer geschikt voor rechtlijnige bewegingen.



Figuur 1.6: Rechtshandig Cartesisch assenstelsel.

1.6.1 Inproduct

Stel we hebben vectoren \vec{a} en \vec{b} . Die we beiden kunnen schrijven als $(a_x; a_y)$ en $(b_x; b_y)$. Als we kijken naar het inproduct is dit gedefiniëerd als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\alpha) \quad (1.4)$$

Waarbij α de hoek tussen de twee vectoren \vec{a} en \vec{b} is.

We zien dat de uitkomst een scalaïr geworden is. In de rechter term staan namelijk alleen maar absolute waardes van de vectoren.

We kunnen deze vermenigvuldiging ook uitschrijven als:¹

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \equiv a_x b_x + a_y b_y \quad (1.5)$$

Meteen is ook duidelijk dat vectoren bij een inproduct parallel aan elkaar moeten staan. Stel dat \vec{a} en \vec{b} loodrecht op elkaar staan, zeg dat \vec{a} alléén een x -component heeft en \vec{b} alléén een y -component dan is het inproduct volgens vergelijking (1.5) gelijk aan 0.

Volgens vergelijking (1.4) moet dit ook 0 zijn omdat de hoek tussen de twee vectoren 90° is.

¹We slaan hier een hoop lineaire algebra en matrix-rekening over. Dit is uit praktische redenen achterwege gelaten.

We zien dus eigenlijk dat de cosinus uit vergelijking (1.4) ons de ontbinding van één van de vectoren \vec{a} of \vec{b} geeft zodat deze parallel aan elkaar komen te staan.

Eigenlijk is dit een beetje gevaarlijk. De hoek die in een opgave gegeven wordt hoeft niet perse de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} te zijn. Kijk dus altijd goed hoe je de vectoren moet ontbinden.

1.6.2 Uitproduct

Waar het bij inproducten van belang was dat de vectoren parallel stonden is het bij uitproducten van belang dat ze loodrecht op elkaar staan. In dit voorbeeld zal gewerkt worden met vectoren die reeds loodrecht op elkaar staan. Zeg dat $\vec{a} = (a_x; 0)$ en $\vec{b} = (0; b_y)$.

Het uitproduct schrijven we nu op als:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \quad (1.6)$$

Deze uitkomst is aanzienlijk lastiger. Niet alleen heeft \vec{c} een waarde, deze heeft ook een richting. Door \vec{a} en \vec{b} loodrecht op elkaar te kiezen wordt ons probleem gelukkig aanzienlijk eenvoudiger.

We kijken eerst naar de waarde van \vec{c} .

De definitie voor de waarde van het uitproduct is:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \equiv |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\alpha) \quad (1.7)$$

Waarbij α wederom de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} is.

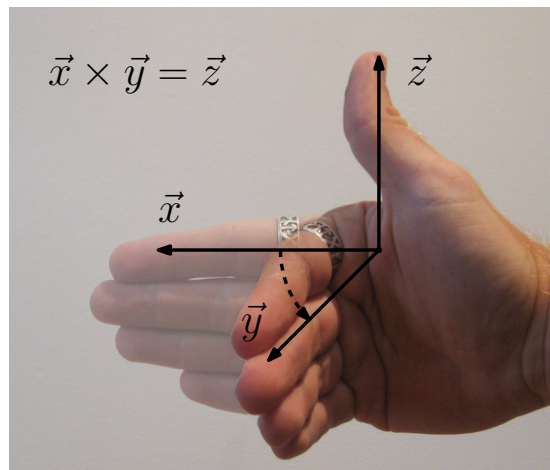
Een andere schrijfwijze om dit uit te rekenen is:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| \equiv a_x b_y - a_y b_x \quad (1.8)$$

Hier zien we, vergelijkbaar met het inproduct, dat vectoren \vec{a} en \vec{b} loodrecht op elkaar moeten staan. In vergelijking (1.7) zien we dat een hoek van 90° een sinus oplevert die 1 wordt.

Bij vergelijking (1.8) zien we, met behulp van onze loodrechte vectoren $\vec{a} = (a_x; 0)$ en $\vec{b} = (0; b_y)$, dat de tweede term weliswaar 0 oplevert, maar de eerste niet. Hadden \vec{a} en \vec{b} parallel gestaan dan was het inproduct duidelijk 0 geworden.

Nu rest ons alleen nog de bepaling van de richting van \vec{c} .



Figuur 1.7: De rechterhandregel.

Voordat we dat doen kijken we eerst naar een andere eigenschap van een rechtshandig assenstelsel. In een rechtshandig assenstelsel (waar we altijd in zullen werken) geldt namelijk altijd dat:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z} \quad (1.9)$$

Dit kunnen we onthouden met de rechterhandregel, zie figuur 1.7. Wijs met de vingers van je rechter hand in de richting van de *eerste* vector, in dit geval de x -richting. Buig daarna je vingers, die maar een kant op kunnen buigen, naar de richting van de tweede vector, in dit geval de y -richting. Je duim, die loodrecht op je vingers staat, zal nu de richting van de resulterende vector aangeven, de z -richting.

Merk ook op dat $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{z}$. Dit is in de berekening van de waarde van \vec{c} ook duidelijk omdat, als we de vectoren omdraaien de waarde uit te rekenen is als $b_x a_y - b_y a_x$ precies vergelijking (1.8) met een minteken.

Bij een uitproduct kun je de waarde van het uitproduct berekenen met vergelijking (1.5) en de richting met behulp van de rechterhandregel.

Hoofdstuk 2

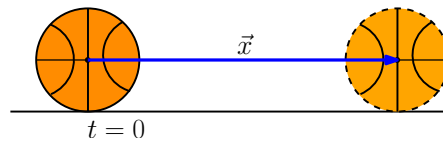
Bewegingen

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar de plaats van een voorwerp door de tijd heen. Uiteindelijk komen we hiermee tot de *bewegingsvergelijkingen* welke algemeen zullen gelden.

2.1 Snelheid

De plaats van een voorwerp zullen we aangeven met een \vec{x} . De plaats is dus een vector. Dit lijkt in eerste instantie vreemd, een voorwerp *is* toch gewoon ergens. Maar om deze plek goed te beschrijven hebben we een referentiekader nodig, een assenstelsel. Dit assenstelsel heeft een oorsprong, of nulpunt. De plaats en oriëntatie hiervan mogen we vrij kiezen. Echter, daarna ligt deze vast.

Vaak zullen we de oorsprong daar leggen waar het voorwerp op tijdstip $t = 0$ ligt. Als het voorwerp daarna verplaatst, heeft hij een verschuiving ondergaan in het assenstelsel en is zijn nieuwe positie aan te wijzen door middel van een vector, beginnende in de oorsprong ($x = 0$) en eindigend bij de plek van het voorwerp. We noemen deze vector \vec{x} .



Figuur 2.1: Een basketbal is verplaatst.

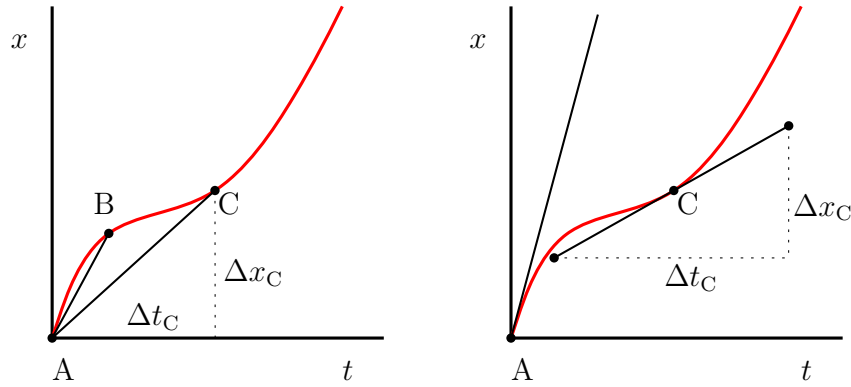
Als we de plaats van het voorwerp door de tijd heen bekijken, kunnen we zijn snelheid bepalen. In het Engels bestaan er ogenschijnlijk twee woorden voor snelheid: speed en velocity. Er is echter een subtiel verschil tussen de twee. Met speed wordt de waarde van de snelheid bedoeld. We kijken dus naar de snelheid als scalair, $|\vec{v}| = v$.

Met velocity wordt bedoeld de vectoriële snelheid \vec{v} , waarde en richting.

Wij zullen, in het Nederlands, de dingen dus helaas een beetje door elkaar gebruiken.

In figuur 2.2a zien we de onregelmatige verplaatsing van een voorwerp. Uit dit diagram kunnen we, zoals aangegeven, de gemiddelde snelheden van punt A tot punten B en C bepalen. Dit doen we voor punt C door het verschil in afstand, Δx_C te delen door het verschil in tijd, Δt_C . Hiermee krijgen we de *gemiddelde* snelheid over het traject van A naar C.

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.1}$$



(a) De gemiddelde snelheid, $v_{\text{gem, C}}$ berekenen uit een $x-t$ -diagram
 (b) De momentane snelheid, v_C , berekenen uit een $x-t$ -diagram

Figuur 2.2: $x-t$ -diagrammen

Dit geeft ons dus niet de snelheid óp punt C. Hiervoor moeten we de stapjes Δt steeds kleiner en kleiner maken en verplaatsen rondom punt C:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.2)$$

In figuur 2.2b zien we dat dit dus in feite een raaklijn is. Hiermee kunnen we de *momentane snelheid* op punt C uitrekenen. Duidelijk is ook meteen dat $v_{\text{gem, C}}$ en v_C niet dezelfde uitkomst geven.

Uit vergelijking (2.2) kunnen we opmaken dat:

$$x(t) = vt \quad (2.3)$$

We schrijven hier niet x maar $x(t)$, x is een functie geworden van de tijd. De tijd is een variabele en voor iedere waarde van t kan x een andere waarde hebben.

Waar we nog geen rekening mee gehouden hebben is dat het voorwerp op tijdstip $t = 0$ misschien helemaal niet in de oorsprong was. Het zou wel eens op een arbitraire positie x_0 gestaan kunnen hebben. Algemener is dus:

$$x(t) = x_0 + vt \quad (2.4)$$

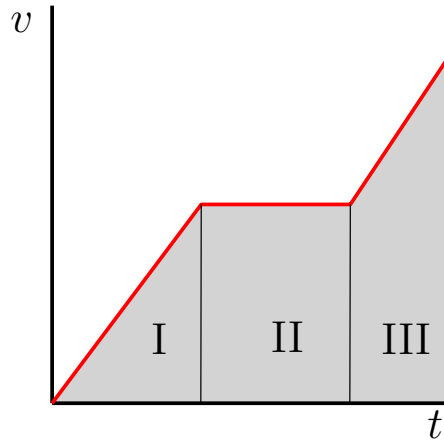
2.2 Versnelling

We zijn er bij vergelijking (2.4) vanuit gegaan dat de snelheid constant bleef. Dit hoeft echter helemaal niet het geval te zijn. Het voorwerp zou wel eens een versnelling kunnen ondergaan. We bekijken het $v-t$ -diagram van figuur 2.3. Hier zien we dat de snelheid niet constant blijft. De snelheid verandert door de tijd, we noemen dit een *versnelling*. Deze kunnen we uitrekenen als:

$$a_{\text{gem}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Op dezelfde manier als voor de momentane snelheid kunnen we ook de momentane versnelling berekenen:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (2.6)$$

Figuur 2.3: $v - t$ -diagram.

We zien dus dat, voor een constante versnelling vanuit stilstand, geldt:

$$v(t) = at \quad (2.7)$$

Een constante versnelling wordt ookwel een *eenparige versnelling* genoemd. In dit diktaat zal altijd uitgegaan worden van eenparige versnellingen.

Wat we ook uit figuur 2.3 kunnen halen is de afstand. Dit doen we door naar het oppervlak van de grafiek te kijken. Ga maar na, bij een oppervlak vermenigvuldig je de lengte met de breedte. De lengte is de snelheid in m/s en de breedte is de tijd in s, dit geeft afstand in m.

Om de afstand te bepalen knippen we het traject op in drie stukken: I, II en III. Berekenen afzonderlijk de afstanden en tellen deze bij elkaar op $x_{\text{tot}} = x_{\text{I}} + x_{\text{II}} + x_{\text{III}}$. Voor stuk I, een versnelling vanuit stilstand, is dit dus:

$$x_{\text{I}} = \frac{1}{2}vt$$

Maar we kenden een uitdrukking voor de snelheid bij versnellingen uit vergelijking (2.7) ofwel:

$$x_{\text{I}} = \frac{1}{2}at^2$$

Dit geldt alleen voor gebied I (en alle andere versnellingen vanuit stilstand). Hier is de beginsnelheid immers 0. Duidelijk is dat dit niet de vergelijking is die voor gebied III geldt, hier versnellen we niet vanuit stilstand.

We kunnen echter vergelijking (2.4) wel aanvullen met een versnellingsterm waarmee we de algemene vergelijking voor de plaats krijgen:

$$x(t) = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \quad (2.8)$$

Ook kunnen we een beginsnelheid toevoegen aan vergelijking (2.7):

$$v(t) = v_0 + at \quad (2.9)$$

Vergelijkingen (2.8) en (2.9) noemen we de *bewegingsvergelijkingen*. Ze gelden algemeen.

Intermezzo

We zijn hier nu enkel met grafieken bezig geweest. Om dit verhaal wiskundig (en fundamenteel natuurkundig) te begrijpen gaan we terug naar vergelijking (2.2). De snelheid is dus de afgeleide van de plaats.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \right) \\ &= 0 + v + at \end{aligned}$$

Hierin is v de beginsnelheid v_0 en daarmee hebben we vergelijking (2.9) terug gekregen. Andersom kan uiteraard ook. Alleen moeten we hiervoor integreren:^a

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= v(t) \\ dx(t) &= v(t)dt \end{aligned}$$

Deze vergelijking gaan we links en rechts integreren. Waarbij de linker term automatisch gelijk is aan $x(t)$.

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T v(t)dt \\ &= \int_0^T v_0 + at \, dt \\ &= s_0 + v_0T + \frac{1}{2}aT^2 \end{aligned}$$

Waarmee we vergelijking (2.8) teruggekregen hebben.

^aWat ook eigenlijk precies is wat we deden bij het bepalen van het oppervlak van grafiek 2.3

De keuze van een assenstelsel is altijd erg belangrijk bij het invullen van de variabelen. Hoe dat blijkt in het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 2.1

We gooien een bal $x=12,0$ m omhoog.

► Op welk punt is de snelheid van de bal gehalveerd?

Allereerst kiezen we ons assenstelsel. We nemen aan dat de bal op tijdstip $t = 0$ op positie $x = 0$ is, tevens kiezen we omhoog als de positieve richting.

We weten dat dit een vertraagde beweging is welke een beginsnelheid heeft. De bal heeft versnelling $a = g = -9,81 \text{ m s}^{-1}$. Negatief, de valversnelling g is immers naar beneden gericht en wij hadden omhoog als de positieve richting gekozen!

Om deze plaats te bepalen zullen we allereerst de beginsnelheid van de bal moeten achterhalen. Voor de snelheid geldt *niet* $v = gt$. Dit zou namelijk inhouden dat de bal enkel negatieve snelheden heeft ($g < 0$) en we weten dat de bal eerst omhoog gaat!

De correcte formule voor de maximum snelheid is $v = v_0 + gt$. We kennen de beginsnelheid, v_0 , echter niet. Dus zullen we iets moeten verzinnen. We zien al snel in dat de gehele beweging symmetrisch is. De weg omhoog duurt even lang als de weg naar beneden. Bovendien is de snelheid bovenin netjes 0.

We zullen dus opzoek gaan naar hoe lang het duurt om de bal naar beneden te laten

vallen. Dit kunnen we halen uit de afstand:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

Hierin is x_0 gelijk aan 12,0 m en x aan 0,00 m, we willen immers weten hoe lang het duurt voordat de bal van boven weer naar beneden is en we hadden beneden als nulpunt gekozen. Als we dit oplossen krijgen we:

$$t = \sqrt{x - x_0/g} \Rightarrow t = \sqrt{2(0,00 - 12,0)/-9,81} = 1,56 \text{ s}$$

Zo lang duurt het dus voordat de bal naar beneden valt.

Hiermee kunnen we ook de snelheid beneden uitrekenen:

$$v = gt = -15,3 \text{ m s}^{-1}$$

Negatief want $g < 0$ en de bal gaat inderdaad in de negatieve richting. De waarde van deze snelheid, $15,3 \text{ m s}^{-1}$, is tevens de snelheid waarmee de bal ooit omhoog ging.

We gaan dus opzoek naar het tijdstip van $v_{1/2}$. Dit doen we via vergelijking (2.9)

$$v_{1/2} = v_0 + gt_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{v_{1/2} - v_0}{g} = 0,782 \text{ s}$$

Deze tijd kunnen we invullen in vergelijking (2.8):

$$x_{v_{1/2}} = v_0 t_{1/2} + \frac{1}{2}gt_{1/2}^2 = 8,97 \text{ m}$$

2.3 Bewegingen in twee dimensies

Veel bewegingen beperken zich niet tot een dimensie. De vergelijkingen (2.8) en (2.9) die we in het vorige hoofdstuk hebben gezien gelden algemeen voor een richting. Als we gaan kijken naar meerdere richtingen moeten we eigenlijk naar de vectorvergelijkingen kijken:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \quad (2.10)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (2.11)$$

Gelukkig zijn deze erg makkelijk op te splitsen in vier (of zes als je in drie dimensies werkt) vergelijkingen omdat de x en y -richting onafhankelijk van elkaar zijn:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (2.13)$$

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad (2.14)$$

$$v_y(t) = v_{y0} + a_y t \quad (2.15)$$

We noemen dit de *bewegingsvergelijkingen*. De vectorpijltjes in deze vergelijkingen zijn wederom weggehaald omdat uit de notatie, x , v_x etc., duidelijk wordt welke richting bedoeld wordt.

Als we de uiteindelijke waarde van de snelheid willen berekenen kan dat zoals we al eerder in voorbeeld 1.1 hebben gezien. We mogen de snelheden, zoals in vergelijking (1.1), kwadratisch bij elkaar optellen:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (2.16)$$

Deze snelheid heeft geen richting meer (er staat ook geen vectorpijlje boven).
De hoek ten opzichte van de horizontaal kunnen we berekenen als:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (2.17)$$

Hoe we hiermee werken wordt in het volgende voorbeeld duidelijk.

Voorbeeld 2.2

Een schip schiet kogels met een snelheid van 200 m s^{-1} onder een hoek van $\alpha = 30^\circ$ ten opzichte van de horizon af vanaf het water oppervlak.

► Hoe ver komen deze kogels?

Om de uiteindelijke afstand te bepalen zullen we vergelijking (2.12) uit moeten rekenen. Deze reduceert in ons geval tot:

$$x(t) = v \cos(\alpha)t$$

Hiervoor moeten we dus de tijd te weten komen.

Dit kunnen we halen uit vergelijking (2.13). Deze reduceert tot:

$$y(t) = 0 + v \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Hieruit volgt dat $t = 20,4 \text{ s}$.

Deze kunnen we invullen in vergelijking (2.12) waaruit volgt dat $x(t) = 3,53 \text{ km}$.

Uit symmetrieoverwegingen kunnen we bedenken dat de hoek waarmee de kogel in het water landt wederom 30° moet zijn.

► Kunnen we dit ook berekenen?

In de x -richting spelen geen krachten, de snelheid in de x -richting zal dus wederom $v_x = v \cos(\alpha) = 173 \text{ m s}^{-1}$ zijn.

De eindsnelheid in de y -richting kunnen we berekenen met vergelijking (2.15).

$v_{y0} = v \sin(\alpha) = 100 \text{ m s}^{-1}$ en $g = -9,81 \text{ m s}^{-2}$. Hieruit volgt dat $v_y = -100 \text{ m s}^{-1}$. Uit vergelijking (2.17) kunnen we halen dat

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-100}{173}\right) = -30^\circ$$

Ofwel het negatieve deel van dezelfde Z-hoek.

Hoofdstuk 3

Krachten

In 1687 schreef Isaac Newton (1643-1726) zijn beroemde *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*¹. Hierin worden ondermeer zijn drie beroemde krachtwetten geformuleerd. Deze zullen de basis zijn voor de klassieke mechanica zoals wij deze gaan bekijken.

3.1 Eerste wet van Newton

De Eerste wet van Newton luidt:

Een voorwerp waarop geen netto kracht werkt is in rust of beweegt met constante snelheid.

Een bekend voorbeeld hiervan is dat als een voorwerp in de ruimte een zetje krijgt, er werkt kortstondig een kracht op, zodat deze een snelheid krijgt. Het voorwerp versnelt alleen maar zolang er contact is, zodra dit contact verbroken is werkt er geen netto kracht meer op en zal het voorwerp met constante snelheid verder bewegen zonder ooit te stoppen. Tenzij er natuurlijk weer een nieuwe kracht op gaat werken.

Er zijn dus altijd krachten nodig om beweging te veroorzaken of te veranderen.

Soms levert deze wet ogenschijnlijk rare verschijnselen op. In figuur 3.1 zien we een voorbeeld. Waarnemer A ziet waarnemer B op zich af komen versnellen, waarnemer B ziet echter precies het zelfde.

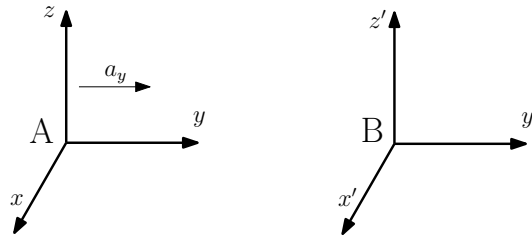
Gelukkig ervaart waarnemer A een externe kracht en waarnemer B niet. Het is dus duidelijk dat waarnemer A versnelt en B in rust is.

Het hierboven genoemde voorbeeld klinkt simpel, maar soms is het niet zo gemakkelijk om na te gaan of je een kracht ervaart. Je zult misschien denken dat je, terwijl je dit leest, geen netto kracht ervaart. Dit is echter niet waar. De Aarde draait om haar as, zodoende zul je een *middelpuntzoekendekracht* ervaren, meer hierover in hoofdstuk 4. Deze kracht zorgt bijvoorbeeld voor de draaiing in een Foucault slinger.

Een stelsel waar geen externe, netto, krachten op werken noemen we een *inertiaalstelsel*.

De aarde is dus geen inertiaalstelsel, ons zonnestelsel ook niet, deze draait immers door de Melkweg, de Melkweg op haar beurt ook niet omdat deze door het universum draait. Een inertiaalstelsel is dus lastig te vinden. Wat wel gedaan kan worden is compenseren voor deze effecten en de krachten netjes in alle berekeningen mee te nemen. Wij zullen echter altijd van inertiaalstelsels uit gaan.

¹wiskundige beginselen van de natuurfilosofie



Figuur 3.1: B ziet A op zich af versnellen maar voelt geen externe kracht.

3.2 Tweede wet van Newton

De Tweede wet van Newton is een kwantificering van de Eerste en luidt:

De snelheidsverandering van een voorwerp is rechtevenredig met de netto kracht en volgt deze.

In formulevorm is dit:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \quad (3.1)$$

Waarbij

$$\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F} \quad (3.2)$$

Als de som van de krachten dus niet nul is, zoals dit in de Eerste wet van Newton wel het geval was, dan zal het voorwerp versnellen in de richting van de resulterende netto kracht.

We zien dat massa invloed heeft op de versnelling. Hoe groter de massa hoe trager de versnelling.

We noemen dit *trage massa*.

Vergelijking (3.1) is niet hoe Newton de Tweede wet zelf heeft geformuleerd, de “echte” formulering komt later in hoofdstuk 6.

Voorbeeld 3.1

We duwen een massa van $m = 5,0$ kg met een kracht van $F_{\text{duw}} = 70$ N vooruit. De massa ondervindt een wrijvingskracht van $F_w = 20$ N.

► Wat is de versnelling van de massa?

We zullen eerst de totale som van de krachten bekijken:

$$\sum \vec{F} = F_{\text{duw}} + \vec{F}_w = 70 - 20 = 50 \text{ N}$$

De duwkracht en de wrijvingskracht werken in tegengestelde richting. Je ziet echter dat de som van de krachten altijd de optelling van vectoren is. Omdat de duwkracht en de wrijvingskracht tegengesteld werken krijgt de waarde van de wrijvingskracht een minteken in de tweede stap.

Nu we de netto kracht hebben, kunnen we de versnelling uitrekenen als:

$$a = \frac{F_{\text{net}}}{m} = \frac{50}{5,0} = 10 \text{ m s}^{-2}$$

3.3 Derde wet van Newton

De Derde wet van Newton luidt:

Als voorwerp A een kracht op voorwerp B uitoefent dan oefent B een even grote maar, in richting, tegengestelde kracht uit op A

In formulevorm:

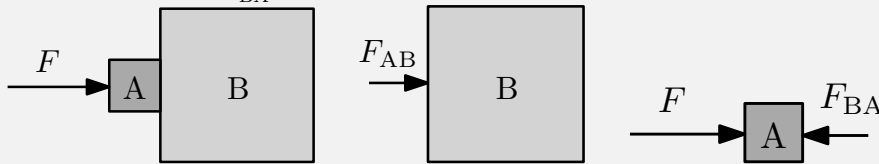
$$F_{A \rightarrow B} = -F_{B \rightarrow A} \quad (3.3)$$

Krachten worden altijd uitgewisseld tussen twee objecten, A en B. Jij (A) duwt een winkelwagen (B), je (A) draagt een tas (B) etc. De Derde wet van Newton zegt nu dat jij en het andere voorwerp tegengestelde krachten met elkaar uitwisselen. Als jij met 10 N een winkelwagen duwt, dan duwt de winkelwagen jou met 10 N terug. Deze krachten worden *krachtenparen* genoemd. Krachtenparen zijn altijd gelijk aan elkaar en worden altijd uitgewisseld tussen twee dezelfde voorwerpen.

Voorbeeld 3.2

In onderstaande figuur zien we een kracht F op voorwerp AB werken. We nemen even aan dat $m_A = 5,0$ kg en $m_B = 15$ kg en $F = 20$ N.

► Wat is de kracht F_{BA} ?



a: Netto kracht op AB.

b: De krachten op B.

c: De krachten op A.

Uit de tweede wet van Newton weten we dan dat:

$$a_{AB} = \frac{F}{m_{A+B}} = 1,0 \text{ m s}^{-2}$$

Dit is tevens de versnelling van A en B afzonderlijk, ze vormen samen immers één voorwerp.

Nu gaan we de voorwerpen afzonderlijk bekijken. We kijken eerst naar voorwerp B, figuur **b**. B ondergaat een versnelling van $1,0 \text{ m s}^{-2}$. De enige kracht die op voorwerp B werkt is de kracht waarmee voorwerp A duwt, F_{AB} :

$$F_{AB} = m_B a = 15 \text{ N}$$

Nu kijken we naar voorwerp A, figuur **c**. Ook dit voorwerp heeft een versnelling van $1,0 \text{ m s}^{-2}$. Hiervoor is een kracht nodig van $F_{\text{net}} = 5,0$ N. We weten al dat er een kracht van $F = 20$ N op werkt. Via vergelijking (3.2) weten we dat:

$$F_{\text{net}} = F + F_{BA}$$

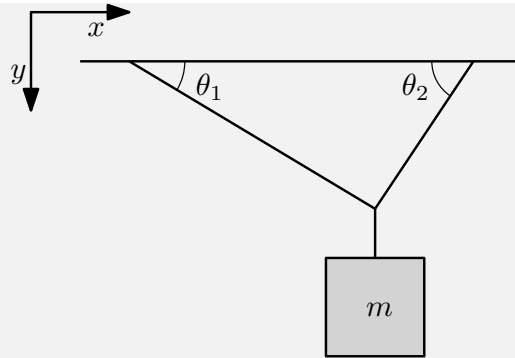
waaruit volgt dat $F_{BA} = -15$ N. Volledig consistent met de Derde wet van Newton.

We hebben hiermee de wetten van Newton niet bewezen. Het is niet mogelijk om Newtons wetten te bewijzen. We kunnen ze wel testen. Er is echter nooit experimenteel bewijs gevonden dat deze niet kloppen zolang $v \ll c$, waarbij c de lichtsnelheid is. Hier is een relativistische aanvulling nodig op de wetten van Newton.

Voorbeeld 3.3

We bekijken een blokje met een massa van $m = 2,00$ kg dat aan het plafond hangt met behulp van twee touwen die onder hoeken $\theta_1 = 30^\circ$ en $\theta_2 = 60^\circ$.

► Wat zijn spankrachten $F_{S,1}$ en $F_{S,2}$ in de touwen?



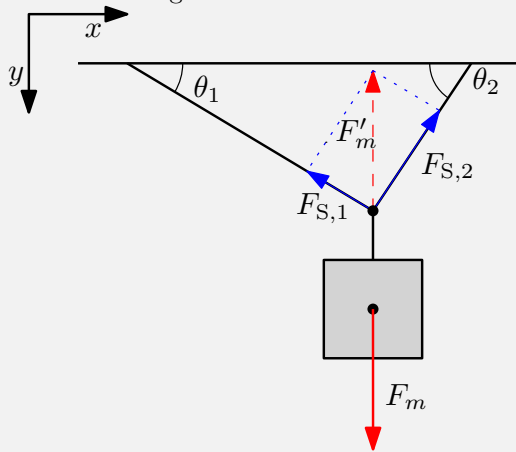
Een blokje van massa m wordt aan een plafond aan twee touwen opgehangen. De y -as is naar beneden gekozen en de x -as naar rechts.

We merken allereerst op dat de gehele situatie in rust is. Via de Eerste en Tweede wet van Newton weten we dus dat de som van de krachten nul zal zijn, zowel in de x - als in de y -richting. We bekijken de richtingen apart:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0$$

Nu gaan we deze sommen apart uitwerken. We berekenen allereerst de kracht die het blokje op het touw uit oefent. Dit is $F_m = mg$ via vergelijking (3.1) in ons geval is dit een kracht van 20 N.

Deze kracht staat in de y -richting en moet dus gecompenseerd worden met een kracht F'_m , de som van de krachten in de y -richting moet immers nul zijn. We doen dit volgens onderstaande figuur.



Een blokje van massa m wordt aan een plafond aan twee touwen opgehangen. De y -as is naar beneden gekozen en de x -as naar rechts.

We werken de sommen verder uit:

$$\sum F_x = -F_{S,1,x} + F_{S,2,x} = -F_{S,1} \cos \theta_1 + F_{S,2} \cos(\theta_2) = 0 \Rightarrow F_{S,1} \cos \theta_1 = F_{S,2} \cos \theta_2$$

$$\sum F_y = F_m - F_{S,1,y} - F_{S,2,y} = F_m - F_{S,1} \sin \theta_1 + F_{S,2} \sin(\theta_2) = 0$$

Uit de eerste vergelijking kunnen we halen dat:

$$F_{S,1} = F_{S,2} \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)}$$

Wat we in kunnen vullen in de tweede vergelijking:

$$F_m = F_{S,2} \frac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} \sin(\theta_1) + F_{S,2} \sin(\theta_2)$$

Invullen van waardes voor F_m , θ_1 en θ_2 geeft $F_{S,2} = 17,3$ N. Waarmee we uit kunnen rekenen dat $F_{S,1} = 10$ N.

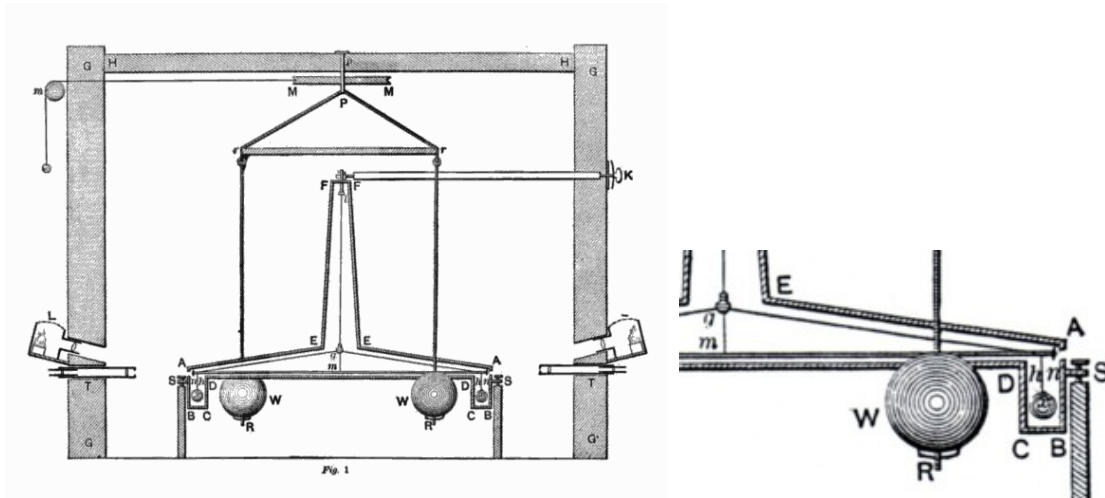
3.4 Gravitiatiekracht

Newton beschreef in zijn *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ook voor het eerst de gravitiatiekracht. Hij stelde dat twee massa's elkaar aantrekken en dat deze omgekeerd evenredig was met de afstand tussen de twee zwaartepunten in het kwadraat. In formulevorm:

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2} \quad (3.4)$$

Waarin G de gravitatieconstante, M de grootste van de twee massa's en m de kleine van de twee massa's en r de afstand tussen de zwaartepunten van M en m .

De massa in deze vergelijkingen noemen we *zware massa*, dit omdat deze massa's elkaar aantrekken. Uiteindelijk zijn trage- en zware massa het zelfde, alleen gebruiken we ze in andere contexten. Gebruiken we de Tweede wet van Newton dan hebben we het vaak over trage massa, gebruiken we de gravitatiewet van hebben we het vaak over zware massa. Wanneer we deze twee vergelijkingen aan elkaar gelijkstellen (om een gravitationele versnelling te bepalen) zien we dat ze het zelfde zijn.



(a) Vertikale doorsnede van het experiment.

(b) Detailtekening van de bollen.

Figuur 3.2: De opstelling van het experiment van Cavendish. Hij vond hiermee een waarde voor $G = 6,74 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, een afwijking van slechts 1% van wat we tegenwoordig meten. Bron: http://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment

Het duurde nog tot 1798 totdat Henry Cavendish (1731-1810) een eerste betrouwbare meting deed voor het meten van de zwaartekrachtsconstante, G . Hij gebruikte hiervoor een torsieslinger², zie figuur 3.2, waaraan hij twee kleine loden bollen had gehangen. Daarnaast hingen twee grote

²Een slinger die rond zijn eigen as draait

loden ballen. Door de draaiing van de torsieslinger te meten kon hij de aantrekking van de bollen meten.

Huidige metingen laten zien dat G een waarde heeft van:

$$G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

Voorbeeld 3.4

De bollen die Cavendish gebruikten hadden een massa van 0,73 kg en 158 kg. De afstand tussen de bollen was 23 cm.

► Wat is de totale gravitationele aantrekkingskracht tussen de bollen die op de torsiebalans werkte?

We kunnen de waarden invullen in vergelijking (3.4):

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2} = 6,6726 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{158 \cdot 0,73}{0,23^2} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Omdat er aan beide armen een bol hangt betekent dit dat de totale kracht op de torsiebalans $2,9 \cdot 10^{-7}$ N bedraagt.

Een andere mogelijkheid is het berekenen van de massa van de aarde:

Voorbeeld 3.5

We weten dat de valversnelling op aarde ruwweg $9,81 \text{ m s}^{-2}$ is.

► Wat is de massa van de aarde?

We kunnen vergelijkingen (3.4) en (3.1) aan elkaar gelijkstellen waardoor we komen tot:

$$mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

Hierbij weten we dat r de straal van de aarde is, $R = 6378 \text{ km}$, de kleine massa m , een *testmassa* kunnen we wegdelen. Zo houden we voor de massa van de aarde over:

$$M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9,81 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2}{6,6726 \cdot 10^{-11}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Gravitatiekracht die op jou werkt is een kracht die uitgewisseld wordt tussen jouw massa, m , en de massa van de aarde, M . De aarde trekt jou aan, maar jij de aarde ook, even sterk. Deze twee krachten zijn dus krachtenparen.

Voorbeeld 3.6

Een tennisbal van $m = 0,50 \text{ kg}$ valt $y = 2,0 \text{ m}$ naar beneden.

► Hoeveel kracht werkt er op de bal?

We hoeven niet perse vergelijking (3.4) te gebruiken omdat het afstandsverschil tussen de straal van de aarde en de straal van de aarde plus twee meter verwaarloosbaar is. We zien dus snel in dat $F = mg = 5,0 \text{ N}$.

We weten dus via de Derde wet van Newton dat de aarde ook met $5,0 \text{ N}$ tot de bal aangetrokken wordt.

► Hoeveel meter “valt” de aarde naar de bal toe?

Uit (3.1) weten we dat de versnelling van de aarde, met een massa van $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $a = 8,3 \cdot 10^{-25} \text{ m s}^{-2}$.

Uit de bewegingsvergelijkingen kunnen we de tijd halen die de bal er over doet om te

vallen: $t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 0,64$ s.

De aarde “valt” dus:

$$y_{\text{aarde}} = \frac{1}{2}at^2 = 1,7 \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

Dit is ongeveer $2 \cdot 10^{-15}$ keer de radius van een waterstofatoom.

3.5 Normaalkracht

Voorwerpen in rust hebben geen netto kracht. Een steen van 1,0 kg die op een tafel stil ligt heeft dus netto kracht nul, zie figuur 3.3.

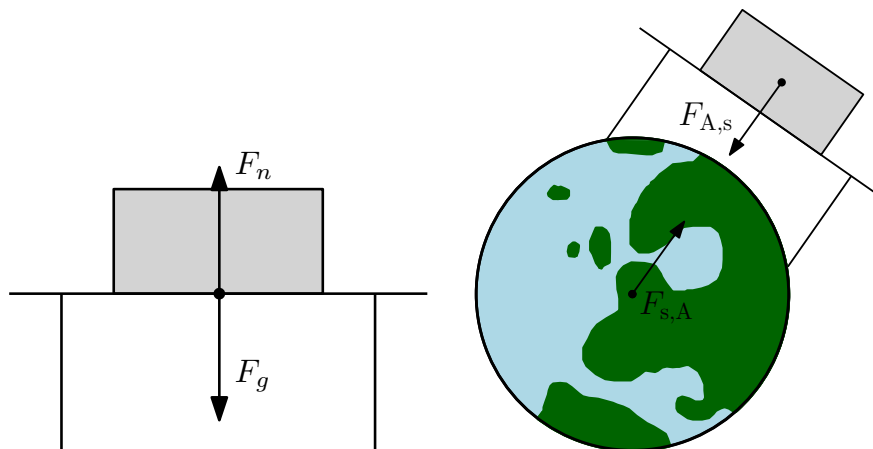
Welke krachten werken er op de steen? Er is een zwaartekracht van de aarde die op de steen werkt, $F_{A,s}$. Deze kracht is naar beneden gericht. Het krachtenpaar, $F_{s,A}$ is even groot en tegengesteld, echter deze kracht werkt niet op de steen, maar op de aarde. Deze kracht zal er dus niet voor zorgen dat de netto kracht op de steen nul is.

Er moet een andere opwaardse kracht zijn die op de steen werkt. Deze kracht wordt geleverd door de tafel, en wordt de *normaalkracht* genoemd. De normaalkracht is de reactieve kracht van de tafel op de steen.

De normaalkracht en de zwaartekracht op de steen zijn even groot en tegengesteld. Ze vormen echter géén krachtenpaar. De zwaartekracht wordt uitgewisseld tussen de aarde en de steen, en de normaalkracht tussen de tafel en de steen.

Het krachtenpaar van de normaalkracht is het *gewicht*. Dit is de contactkracht van de steen op de tafel welke aangrijpt op het contactpunt van de tafel en de steen. Het gewicht van een voorwerp is dus de kracht van een object op een contactoppervlak.

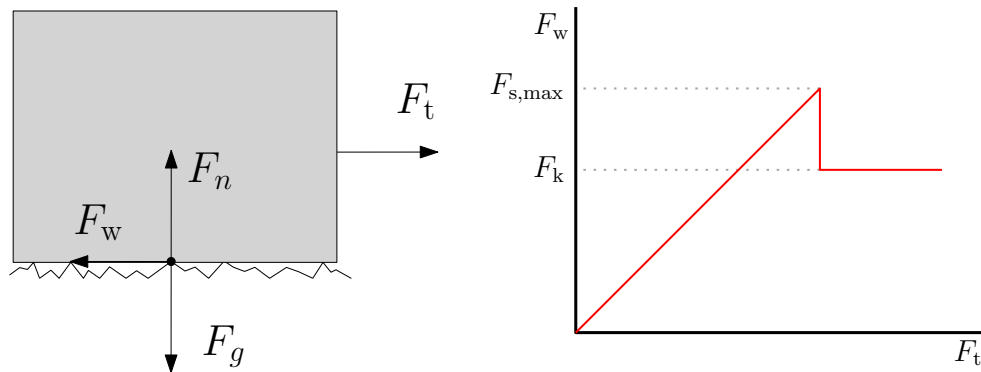
De normaalkracht is vergelijkbaar met de reactieve spankracht in de touwen van voorbeeld 3.3. Voorwerpen kunnen veel kracht leveren via reactieve krachten als de normaal kracht, denk maar aan de fundering van een gebouw. Er kunnen echter geen bewegingen of arbeid³ mee geleverd worden.



(a) Het krachtenpaar van het gewicht en de normaalkracht. (b) Het krachtenpaar van de zwaartekracht van de steen en aarde.

Figuur 3.3: Voorbeelden van krachtenparen van een steen die op een tafel ligt.

³Zie hoofdstuk 5.1



(a) Wrijvingskracht kan gezien worden als het schuiven van een voorwerp over een ruw oppervlak. Hoe groter de F_n hoe harder tegen het ruwe oppervlak aangedruwd wordt en hoe groter de wrijving zal zijn.

(b) De trekkraft op een voorwerp wordt steeds vergroot totdat deze groter is dan $F_{s,max}$ dan komt het voorwerp langzaam in beweging.

Figuur 3.4: Wrijving van een voorwerp op een ruw oppervlak.

3.6 Tekenen van krachten

Krachtenpijlen hebben, net als vectoren, drie eigenschappen: lengte, richting en beginpunt.

De richting van de pijl geeft aan in welke richting deze kracht werkt.

De lengte geeft de waarde van de kracht aan. Hiervoor moet echter wel een schaal bekend zijn. Dit wordt vaak genoteerd als $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ N}$, waarbij 1 cm lengte overeenkomt met 10 newton aan kracht.

Krachtenpijlen moeten altijd beginnen op het punt waar de kracht aangrijpt. De zwaartekracht zoals op het blokje in voorbeeld 3.3 grijpt in het zwaartepunt aan. Daarna gaan we de krachten ontbinden en wordt er een F'_m getekend. De plaats hiervan lijkt willekeurig. Echter, we hebben deze pijl verplaatst naar de plaats waar de spankrachten aangrijpen om zo F'_m makkelijker te kunnen ontbinden.

Vaak worden krachtenpijlen in een *free body diagram* getekend. In een free body diagram reduceer je het voorwerp waarop de krachten werken tot een punt en teken je alle krachten vanuit dit punt, het zwaartepunt, zie paragraaf 6.5.

In een free body diagram teken je alleen de krachten die *op* het voorwerp werken, nooit krachten die het voorwerp zelf uitoefent op andere voorwerpen. Er zijn dus nooit krachtenparen te vinden in een free body diagram!

Ook teken je nooit krachtcomponenten in een free body diagram. Als je dit doet zou je de kracht twee keer tekenen. Krachtcomponenten worden vaak met stippellijnen aangegeven. In voorbeeld 3.7 zal hier een voorbeeld van te zien zijn.

3.7 Wrijvingskracht

Een voorwerp op een schuine helling kan alleen blijven liggen als er een kracht is die de zwaartekracht tegenwerkt. Vaak is dit de *wrijvingskracht*. De wrijvingskracht wordt sterker naar mate het voorwerp harder tegen de helling aan duwt. Ofwel, zijn gewicht en bijbehorende normaalkracht moeten groter zijn. Zie figuur 3.4b.

Wat we ook uit ervaring weten is dat, als je tegen een voorwerp aan duwt deze eerst niet in

beweging komt maar dat het, zodra deze eenmaal in beweging is, makkelijker wordt. Dit is weergegeven in figuur 3.4b.

We zien dat de trekkracht F_t en de wrijvingskracht F_w eerst gelijk op gaan waardoor het voorwerp blijft liggen, we noemen dit *statische wrijving*.

Tijdens statische wrijving geldt:

$$F_t = F_s \quad (3.5)$$

Zodra $F_t > F_{s,\max}$ is de wrijvingskracht constant en gelijk aan de kinetische wrijving:

$$F_w = F_k \quad (3.6)$$

Waarbij de netto kracht groter kan zijn dan 0:

$$F_{\text{net}} = F_t - F_k > 0 \quad (3.7)$$

Voor de statische wrijving geldt:

$$F_{s,\max} = \mu_s F_n \quad (3.8)$$

Hierin is μ_s de coëfficiënt voor maximale statische wrijving.

Voor de kinetische wrijving geldt:

$$F_k = \mu_k F_n \quad (3.9)$$

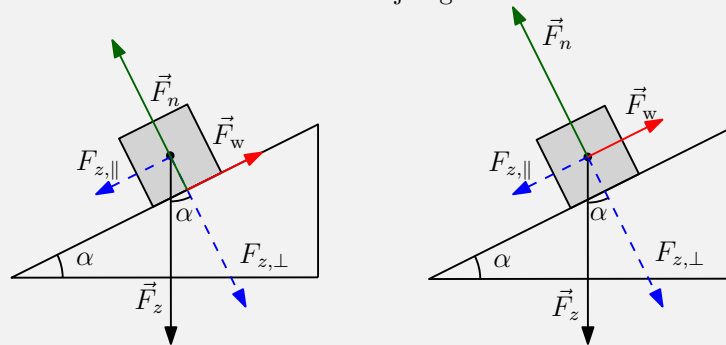
Met μ_k de coëfficiënt voor kinetische wrijving.

Zoals te zien aan de vergelijkingen zijn beide coëfficiënten dimensieloos.

Voorbeeld 3.7

We beschouwen een blokje van massa $m = 1,0$ kg op een helling met hoek $\alpha = 30^\circ$. Zie onderstaande figuur. Het blokje staat *nét* stil.

► Wat is de coëfficiënt voor statische wrijving?



De krachten netjes op de juiste plaats getekend.

Vaak wordt de zwaartekracht in plaats van het gewicht getekend. De normaalkracht wordt ook naar het zwaartepunt verplaatst om zo een *free body diagram* te krijgen.

We zien dat de richting van het gewicht niet heel erg handig is in deze situatie. We ontbinden de zwaartekracht dan ook in een parallel component $F_{z,\parallel}$ en een loodrechte component $F_{z,\perp}$. Deze kunnen we uitrekenen vanwege driehoeksgelijkheid van de krachtvectoren en de helling

$$F_{z,\parallel} = F_z \sin(\alpha)$$

$$\sum F_{z,\perp} = F_z \cos(\alpha)$$

Ook kunnen we een krachtenbalans voor de loodrechte- en de parallelle richting opstellen:

$$\sum F_{\parallel} = 0$$

$$\sum F_{\perp} = 0$$

We beseffen ons dat er in de loodrechte richting niet veel gebeurt, het blokje zakt niet door de helling. De normaalkracht moet dus even groot zijn als de loodrechte component van het gewicht.

$$F_n = F_{z,\perp} = F_z \cos(\alpha) = mg \cos(\alpha) = 8,5 \text{ N}$$

In de parallelle richting speelt de wrijvingskracht:

$$F_w = F_{z,\parallel} = F_z \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha) = 4,9 \text{ N}$$

Nu kunnen we vergelijking (3.8) oplossen. We zien nu dat:

$$\mu_s = \frac{F_w}{F_n} = \frac{4,9}{8,5} = 0,58$$

Stel nu dat de helling instantaan wrijvingsloos wordt en een hoogte van $h = 30$ cm heeft?

► Hoe lang duurt het voordat het blokje beneden is?

We weten dat de parallelle component van de zwaartekracht over blijft via de Tweede wet van Newton geldt dus:

$$\sum F_{\parallel} = F_{z,\parallel} = ma$$

Omdat de massa bekend is valt de versnelling a uit te rekenen, $a = 4,9 \text{ m s}^{-2}$.

Met deze versnelling moet het blokje $s = h/\sin(\alpha) = 60$ cm naar beneden glijden.

Via de bewegingsvergelijkingen kunnen we de duur nu uitrekenen:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0,49 \text{ s}$$

► Met welke snelheid komt het blokje beneden?

Dit kunnen we via de bewegingsvergelijkingen oplossen:

$$v = at = 4,9 \cdot 0,49 = 2,4 \text{ m s}^{-1}$$

Hoofdstuk 4

Cirkelbewegingen

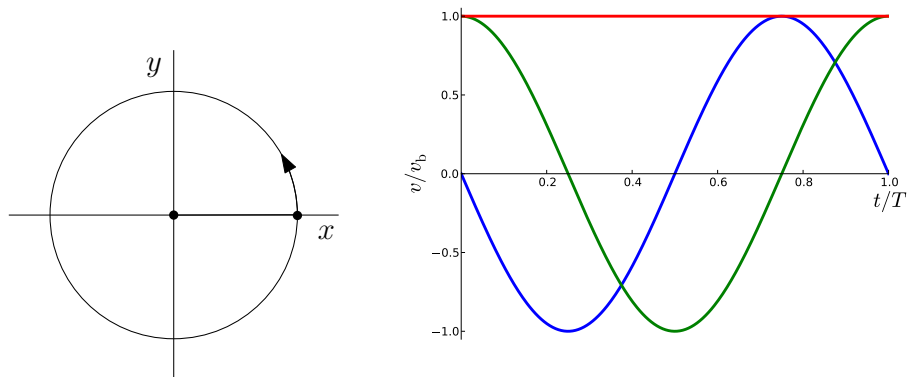
Cirkelbewegingen komen we in het dagelijks leven vaak tegen. Bijvoorbeeld als we met de fiets een bocht maken. *Wij* ervaren dan een kracht naar buiten. Deze kracht is echter een schijnkracht die voort komt uit *ons* perspectief. Natuurkundig gezien is er iets anders aan de gang.

4.1 Middelpuntzoekende kracht

Uit hoofdstuk 2 kenden we vergelijking (2.1), $v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Bij een cirkelbeweging kunnen we deze vergelijking in een speciale vorm gieten. We weten immers dat $\Delta x = 2\pi r$, de omtrek van een cirkel. De tijd Δt schrijven we bij deze, herhalende cirkelbeweging, als T , de *omlooptijd*. Hiermee krijgen we voor de baansnelheid van een cirkelbeweging:

$$v_b = \frac{2\pi r}{T} \quad (4.1)$$

We gaan nu kijken naar een cirkelbeweging waarbij de baansnelheid, v_b , constant is. Let op dat de vorige vergelijking geen vectorvergelijking is, hij geeft ons alleen de waarde van de baansnelheid. Als we naar de richting van de snelheid kijken zien we dat de x - en y -component van de snelheid de hele tijd veranderen, zie de grafiek in figuur 4.1.

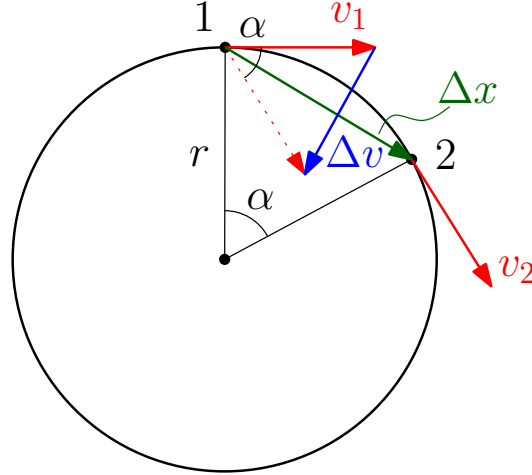


(a) Op tijdstip $t = 0$ begint de draaiing op $x = x_{\text{max}}$ en $y = 0$.

(b) De rode lijn geeft de snelheid v_b aan, de blauwe de component v_x en de groene de component v_y .

Figuur 4.1: Bij een ronddraaiende beweging maken de componenten v_x en v_y een versnelling door terwijl de baansnelheid v_b constant blijft.

We zien dus dat v_x en v_y versnellingen doormaken. Via de Eerste en Tweede wet van Newton weten we dus dat er een kracht op het ronddraaiende voorwerp moet werken. We bekijken figuur 4.2.



Figuur 4.2: De snelheidsvector verandert van richting tussen punt 1 en 2, deze verandering wordt veroorzaakt door een middelpuntzoekende kracht.

We zien dat de snelheidsvector tussen punt 1 en 2 van richting verandert. We bekijken de snelheidsverandering, Δv (blauw). We weten dat $\Delta v = v_2 - v_1$ ofwel, $\Delta v + v_1 = v_2$, om dit te doen verschuiven we v_2 (gestippeld) naar v_1 en krijgen we resulterend Δv . We hebben tijdens deze snelheidsverandering afstand Δx (groen) afgelegd. Omdat v_1 en v_2 dezelfde lengte en dus waarde hebben, dit is immers de baansnelheid, kunnen we inzien dat driehoeken $v_1, \Delta v, v_2$ en $r, \Delta x, r$ gelijkvormig zijn, ze hebben dus beiden hoek α . Omdat de driehoeken gelijkvormig zijn kunnen we de volgende verhouding opstellen:

$$\frac{\Delta x}{r} = \frac{\Delta v}{v_b} \quad (4.2)$$

Nu gaan we kijken naar hele kleine stapjes Δx , ofwel hele kleine hoeken α . Voor de afstand Δx geldt dan:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta x = v_b \Delta t \quad (4.3)$$

Waarbij we opmerken dat hierbij de richting van Δv steeds meer naar het midden begint te wijzen.

Als we nu Δx uit vergelijking (4.3) in vergelijking (4.2) invullen krijgen we:

$$\frac{v_b \Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v_b} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_b^2}{r} \quad (4.4)$$

In de eerste term herkennen we via vergelijking (2.5) een versnelling welke naar het midden gericht staat (net als Δv voor kleine hoeken α):

$$a_c = \frac{v_b^2}{r} \quad (4.5)$$

We noemen dit de *centripetale versnelling*. Dit is de versnelling die nodig is om een voorwerp met constante baansnelheid in een cirkel rond te laten gaan.

De netto kracht die deze versnelling veroorzaakt hebben we een speciale naam gegeven, de *centripetaalkracht* of de *middelpuntzoekende kracht*, gezien de richting van deze kracht. Via de Tweede wet van Newton kunnen we deze uitrekenen als:

$$F_{\text{mpz}} = \frac{mv_{\text{b}}^2}{r} \quad (4.6)$$

In het dagelijks leven ervaart men deze kracht als een middelpuntvliegende kracht. Dit is echter, natuurkundig gezien, een foute benaming. Uit bovenstaande afleiding is duidelijk op te maken dat het hier om een kracht gaat die naar het midden moet wijzen.

Waar komt deze gekke benaming dan vandaan?

We kijken naar een auto die een bocht naar rechts draait. Wij zitten in de auto en gaan, zolang er geen krachten op ons werken, rechtdoor. De auto schuift dus onder ons door naar rechts. We krijgen dus op een bepaald moment de linker binnenkant van de auto tegen onze linker schouder aangedruwd. De auto duwt ons dus naar rechts. Volgens de Derde wet van Newton zullen wij een reactiekracht op de auto uit oefenen, naar links gericht.

Dit is de reden waarom wij een middelpuntvliegende kracht lijken te ervaren. Echter, wij zitten niet in een inertiaalstelsel en mogen dit soort uitspraken niet zomaar doen. Vanuit het perspectief van de waarnemer aan de kant van de weg, die wel in een inertiaalstelsel zit, is het duidelijk dat er sprake is van een middelpuntzoekende kracht.

Om in een cirkelbaan te *blijven* moet er continu een netto kracht zijn. Ofwel, bij een cirkelbeweging moet altijd gelden:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{mpz}} \quad (4.7)$$

De middelpuntzoekende kracht “is” er dus niet zomaar, het totaal van alle andere krachten moet zo sterk zijn dat het voorwerp in de bocht gehouden kan worden. De waarde van deze netto kracht valt uit te rekenen met vergelijking (4.6). Het totaal van deze krachten moet bovendien naar het middelpunt van de cirkel wijzen.

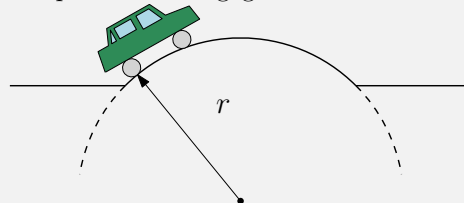
Dit is de reden dat auto's met nat weer *uit* de bocht vliegen. De wrijvingskracht op de banden die hem naar binnen drukken is te klein en er is geen netto kracht meer. Volgens de Eerste wet van Newton is het voorwerp nu in rust en zal rechtdoor gaan. De cirkelbaan kan niet gehouden worden en de auto vliegt uit de bocht. Om de auto toch veilig door de bocht te laten gaan kan men twee dingen doen:

De auto langzamer laten gaan. Via vergelijking (4.6) zien we dat de *benodigde* middelpuntzoekende kracht hierdoor minder wordt.

Of een grotere bocht maken. Hierbij zien we wederom dat de *benodigde* middelpuntzoekende kracht kleiner wordt.

Voorbeeld 4.1

De Amerikaanse natuurkundige Arthur Compton (1892-1962) is niet alleen bekend vanwege zijn Nobelprijs voor de ontdekking van het Compton Effect. Hij is ook bekend voor het ontwerpen van de eerste snelheidsdrempels. Als kanselier in St. Louis viel het hem op dat motorrijders erg hard over het terrein van de University of Washington reden. Hij bedacht hiervoor de een drempel zoals weergegeven in onderstaande figuur.



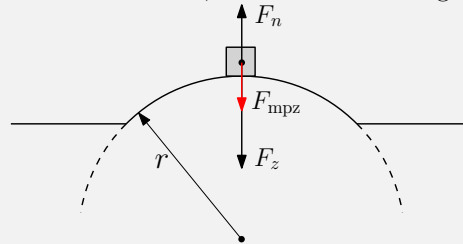
Een schematische snelheidsdrempel zoals ontworpen door Arthur Compton.

Hij vroeg de bouwers een stuk van een cilinder met een straal van $r = 20$ m te bouwen die boven het wegdek uit stak.

► Hoe hard kan men over deze drempel rijden?

Allereerst beseffen we ons dat de auto in een cirkelbaan gaat. Ofwel vergelijking (4.7) geldt.

Onze volgende vraag is, welke krachten spelen er een rol? Dit is de zwaartekracht en de normaalkracht. De zwaartekracht is de kracht die naar beneden wijst en de normaalkracht omhoog. Het verschil tussen beiden (ze wijzen immers in tegengestelde richting) moet dus de middelpuntzoekende kracht leveren, zie onderstaande figuur.



De zwaartekracht en de normaalkracht vormen samen de middelpuntzoekende kracht, krachten getekend in een *free body diagram*.

De normaalkracht zal dus, als we harder gaan rijden, steeds minder groot hoeven te zijn. Zolang er een normaalkracht is, is er contact met het wegdek. Als we té hard gaan vliegen we dus van de drempel af.

In vergelijkingen wordt dit:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{F}_z + \vec{F}_n = F_{\text{mpz}} \\ &= F_z - F_n = F_{\text{mpz}}\end{aligned}$$

In de limiet voor maximale snelheid geldt $F_n = 0$ ofwel:

$$F_z \geq F_{\text{mpz}} \Rightarrow mg = \frac{mv_{\text{b,max}}^2}{r}$$

Uit bovenstaande vergelijking zien we dat de massa er links en rechts uit te delen is. De maximum baansnelheid geldt dus voor zowel fietsers als vrachtwagens!

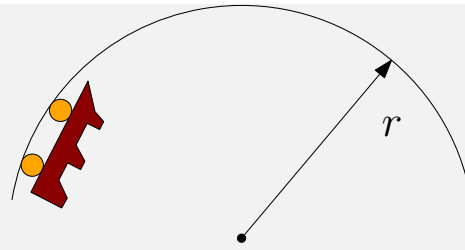
De uiteindelijke snelheid is $v_{\text{b,max}} = \sqrt{gr} = 14 \text{ m s}^{-1}$.

Met het volgende voorbeeld kijken we naar precies de omgekeerde situatie waarin een minimum baansnelheid gevraagd wordt.

Voorbeeld 4.2

In een achtbaan moet een karretje hard genoeg rijden om in de looping te blijven. We bekijken een cirkelvormige looping met een straal van $r = 30$ m. Zie onderstaande figuur.

► Hoe hard moet het karretje rijden om veilig door de looping heen te gaan?

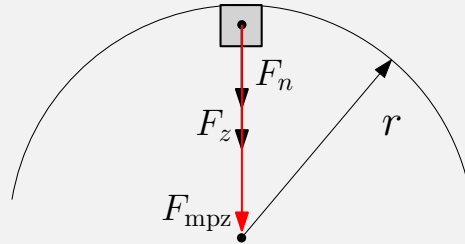


Een schematische cirkelvormige looping. Normaalgesproken zijn loopings druppelvormig om de bezoekers meer G -krachten te laten ervaren.

We starten wederom met vergelijking (4.7) en realiseren ons dat het gewicht en de normaalkracht in dezelfde richting wijzen. Ofwel:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= \vec{F}_z + \vec{F}_n = F_{\text{mpz}} \\ &= F_z + F_n = F_{\text{mpz}}\end{aligned}$$

Waarbij we ons moeten realiseren dat als er geen normaalkracht is, er geen contact met de baan is ofwel, we beginnen door de baan te zweven of te vallen.



De zwaartekracht en de normaalkracht vormen wederom samen de middelpuntzoekende kracht, echter nu moeten we zorgen dat de normaalkracht in ieder geval groter is dan de zwaartekracht.

Voor de limiet van $F_n = 0$ geldt dus:

$$F_z \leq F_{\text{mpz}} \Rightarrow mg = \frac{mv_{\text{b,min}}^2}{r}$$

Als we dit uitrekenen krijgen we $v_{\text{b,min}} = \sqrt{gr} = 17 \text{ m s}^{-1}$.

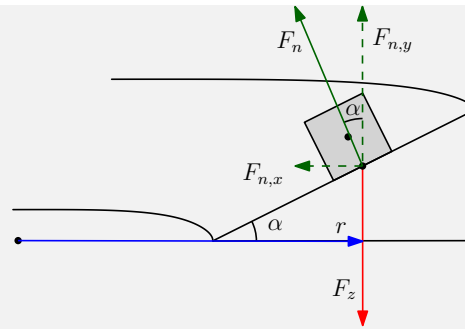
4.2 Opstaande bochten

Indoor wielervedbanen (keirin banen) hebben een opstaande bocht. Deze bocht is opstaand zodat renners met een hogere snelheid door de bocht kunnen. Als dit niet zo was zou de wrijvingskracht van de banden bij deze snelheden onvoldoende zijn om de fietser in zijn bocht te houden. Door de opstaande bocht kan de normaalkracht een bijdrage aan de middelpuntzoekende kracht leveren.

Voorbeeld 4.3

We bekijken schematisch een fietser op een keirin baan, zie onderstaande figuur, de snelheid van de fietser is het papier in gericht. We gaan er vanuit dat de straal van de baan $r = 15,0 \text{ m}$, de massa van de fietser met fiets is $m = 70,0 \text{ kg}$ en de hoek van de baan is $33,0^\circ$.

► Wat is de snelheid waarmee de bocht gehouden kan worden zodanig dat de wielen geen wrijvingskracht uit hoeven te oefenen?



Schematisch een opstaande bocht in een keirin baan. De snelheid van de fietser is het papier in gericht.

De normaalkracht staat altijd loodrecht op het oppervlak. De y -component van de normaalkracht, $F_{n,y}$ is even groot als de zwaartekracht, F_z . Deze kennen we $F_z = mg = 687 \text{ N}$.

De x -component, $F_{n,x}$ is op dat moment over. Deze component zal de middelpuntzoekende kracht leveren. Hiermee is de middelpuntzoekende kracht ook meteen in de correcte horizontale richting gericht. Je kunt denken dat deze schuin naar beneden, recht naar de punt die het midden aangeeft, moet wijzen. Dit is echter niet het geval omdat de wielrenner niet in hoogte verandert. De cirkel die hij rijdt ligt in het horizontale vlak en daarmee de middelpuntzoekende kracht ook.

Met behulp van de driehoeksgelijkheid kunnen we de x -component van de normaalkracht uitrekenen, deze is:

$$\begin{aligned} F_{\text{mpz}} &= F_{n,x} \\ &= F_{n,y} \tan(\alpha) \\ &= F_g \tan(\alpha) = mg \tan(\alpha) = 446 \text{ N} \end{aligned}$$

Met deze uitkomst kunnen we met behulp van vergelijking (4.6) de snelheid uitrekenen:

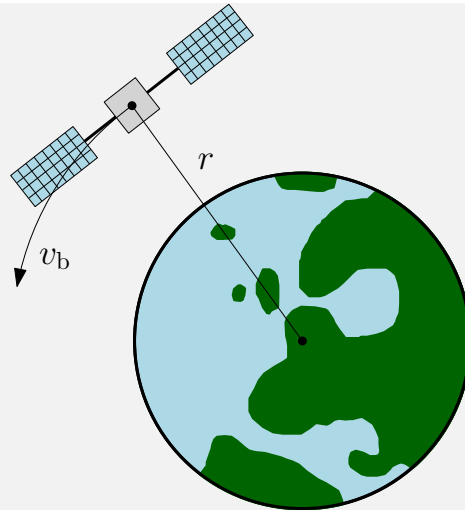
$$v_b = \sqrt{\frac{F_{\text{mpz}} r}{m}} = 9,78 \text{ m s}^{-1}$$

Ook in de ruimte speelt de middelpuntzoekende kracht een rol. In het volgende voorbeeld gaan we kijken naar een satelliet die rond de Aarde draait in een geostationaire baan.

Voorbeeld 4.4

Een satelliet in een geostationaire baan doet er precies 24 uur over om rond de Aarde te draaien. Hij “hangt” dus steeds boven het zelfde punt boven het Aardoppervlak.

► Op welke hoogte, r , is deze baan?



Een satelliet draait rond de Aarde.

We beginnen weer met vergelijking (4.7) en realiseren ons dat er maar één kracht werkt, de gravitatiekracht. Ofwel:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_G = F_{\text{mpz}} \\ &= G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv_b^2}{r}\end{aligned}$$

Hierbij valt de kleine massa, m , van de satelliet er uit en we vullen vergelijking (4.1) in:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

Herschikken van variabelen levert:

$$r = \left(\frac{GMT}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Waarbij we weten dat $T = 24 \text{ uur} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$ en de massa van de Aarde $M = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Dit invullen levert $r = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$.

Let op dat dit de afstand van zwaartepunt tot zwaartepunt is. Als je de hoogte wilt weten moet hier de straal van de Aarde nog afgehaald worden.

Een veel voorkomend misverstand is dat er in de ruimte of ruimtestations geen zwaartekracht is. Dit is zeker niet het geval.

In het vorige voorbeeld hebben we gezien dat satellieten die een cirkelbaan doorlopen, een middelpuntzoekende kracht nodig hebben. Deze wordt geleverd door de zwaartekracht.

Als er dus geen zwaartekracht zou zijn zou de satelliet dus uit de bocht vliegen.

Maar waarom zien we astronauten dan zweven in een ruimtestation?

Dit komt omdat de astronauten en het ruimtestation constant rond de Aarde aan het vallen zijn. En als alles om je heen in een vrije val zit zal alles dus lijken te zweven.

Als we op het aardoppervlak op een stoel zitten geldt dat de som van de krachten gelijk moet zijn aan nul:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Omdat er altijd een zwaartekracht op ons werkt moet deze zwaartekracht wel gecompenseerd worden met een normaalkracht van de stoel:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_n = F_z - F_n = 0$$

In een ruimtestation, wat in omloop is moet gelden dat de som van de krachten gelijk is aan de middelpuntzoekende kracht:

$$\sum \vec{F} = F_{\text{mpz}}^{\vec{}}$$

Er is op dat moment dus geen normaalkracht meer nodig om je op de stoel te houden:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_z$$

De normaalkracht is dus gelijk aan nul. Omdat de normaalkracht en het gewicht een krachtenpaar vormen is het gewicht dus ook gelijk aan nul.

In de ruimte werkt er dus wel zwaartekracht op je, maar je oefent zelf geen gewicht meer uit.

Hoofdstuk 5

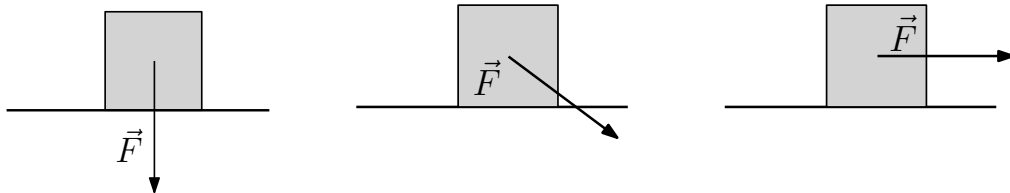
Energie

We weten inmiddels dat krachten voorwerpen in beweging kunnen brengen. Uit onze eigen ervaring weten we dat bewegende voorwerpen energie bevatten. Er zal dus een link bestaan tussen krachten en energie.

5.1 Arbeid

We willen een kist over een bepaalde afstand verplaatsen. De kist staat eerst stil en wordt vervolgens in beweging gebracht door een kracht. De kracht die we gedurende het traject op de kist zetten zal *arbeid* verrichten.

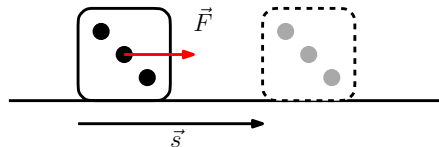
Als we een kist vooruit willen duwen kunnen we ons voorstellen dat het geen zin heeft om bovenop de kist te duwen. We zullen moeten duwen in de richting waarin we de kist willen verplaatsen, zie figuur 5.1.



- (a) De kracht staat loodrecht op de bewegingsrichting van de kist, de kist zal nergens heen gaan.
(b) De kracht staat schuin op de gewenste bewegingsrichting, de kist zal langzaam gaan schuiven.
(c) De kracht staat parallel aan de gewenste bewegingsrichting, de kist zal probleemloos schuiven.

Figuur 5.1: Krachten die onder verschillende hoeken op een kist werken.

De kracht, \vec{F} en de weg, \vec{s} , moeten dus parallel aan elkaar staan. Zie figuur 5.2.



Figuur 5.2: De dobbelsteen wordt met een kracht F over een weg s verplaatst.

Arbeid wordt geleverd als een kracht over een bepaalde afstand werkt. Hierbij moet de kracht en de afstand wel parallel aan elkaar staan. De vergelijking voor de arbeid, die we de letter W geven, is dan ook:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s} \quad (5.1)$$

De eenheid van arbeid is *joule*¹. 1 joule is de arbeid die verricht wordt door één newton over één meter.

We zien dat arbeid dus het inproduct is van de kracht, \vec{F} , en de verplaatsing, $\Delta \vec{s}$, en dus zelf geen richting heeft.

We kunnen dit inproduct uitschrijven tot:

$$\Delta W = F \Delta s \cos(\alpha) \quad (5.2)$$

Waarbij α de hoek tussen \vec{F} en $\Delta \vec{s}$ is. De cosinus geeft ons dus “automatisch” de ontbinding waardoor de kracht en de weg parallel aan elkaar komen te staan.

Deze notatiewijze is wat gevaarlijk. Soms is de hoek helemaal niet zo duidelijk. Het is altijd handiger om zélf na te blijven denken en zelf de ontbinding te doen.

Voorbeeld 5.1

Laten we nog eens kijken naar figuur 5.1b. Stel dat de hoek $\alpha = 45^\circ$, de massa van de kist $m = 1,5$ kg en de kracht $F = 15$ N. We verplaatsen de kist 15 m naar rechts.

► Hoeveel arbeid moet er verricht worden?

Allereerst moeten we de kracht ontbinden: $F_{\parallel} = F \cos(\alpha) = 11$ N.

Nu kunnen we vergelijking (5.2) invullen en uitrekenen: $W = F_{\parallel} s = 11 \cdot 15 = 1,6 \cdot 10^2$ J.

Intermezzo

In nog algemenere vorm kunnen we kleine stapjes $d\vec{s}$ nemen die ieder een kracht \vec{F} nodig hebben waarvoor kleine stukjes arbeid dW nodig zijn:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.3)$$

Waarbij links en rechts integreren^a levert:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.4)$$

De weg waarover de kracht werkt zou namelijk wel eens kronkelig kunnen zijn, waardoor de kracht ook kronkelig moet zijn. De integraal, mits functies voor F en s bekend zijn, levert dan netjes de totale arbeid van het gehele proces.

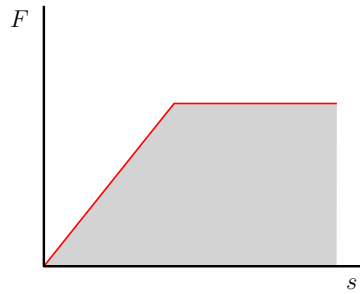
^aHierbij gebruiken we dat $\int dW = W$

5.1.1 Niet constante krachten

Voor niet constante krachten kunnen we met behulp van een $F - s$ diagram zoals in figuur 5.3, toch de arbeid kunnen bepalen door het oppervlak onder de grafiek uit te rekenen.

Voor het oppervlak vermenigvuldigen we immers de x -as met de y -as. Ofwel we vermenigvuldigen de kracht met de weg en we zien direct dat dit de arbeid oplevert.

¹De naam joule komt van de Engelsman James Prescott Joule en dient dus niet op een Franse manier uitgesproken te worden maar als “djoel”.

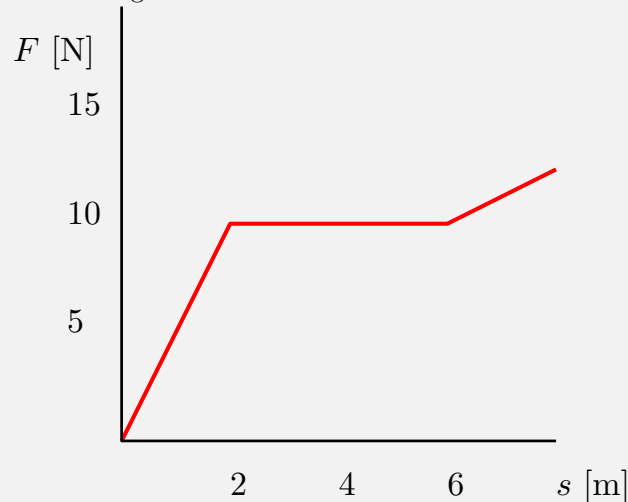


Figuur 5.3: De kracht uitgeoefend over deze weg is niet constant.

Voorbeeld 5.2

We bekijken een onregelmatige kracht zoals in de figuur hieronder.

► Hoeveel arbeid wordt hier geleverd?



Een onregelmatige kracht oefend arbeid uit.

Om de arbeid te berekenen moet het oppervlak onder de grafiek berekend worden. We delen de grafiek hiervoor op in drie stukken s_I van 0 tot 2 m, s_{II} van 2 tot 6 m en s_{III} van 6 tot 8 m.

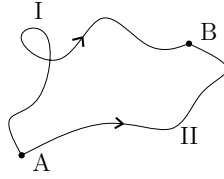
Hiermee wordt de arbeid:

$$W = W_I + W_{II} + W_{III} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + \left(10 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 2\right) = 72,5 \text{ N}$$

5.2 Potentiële energie

Als een voorwerp zich door een krachtenveld beweegt moet hiervoor arbeid verricht worden. Stel dat wij van punt A naar punt B willen, zie figuur 5.4, dan kunnen wij hier via verschillende wegen naartoe, I en II.

We noemen een krachtenveld *conservatief* als het, onafhankelijk van de weg die men kiest, altijd evenveel arbeid kost/levert om van het ene punt naar het andere punt te gaan.



Figuur 5.4: Als we in een conservatief krachtenveld van A naar B gaan maakt het niet of we route I, II of de kortste weg pakken.

Of in formulevorm:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}_I = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}_{II}$$

De arbeid die dit kost of oplevert gaat niet verloren. Het is opgeslagen in het voorwerp. Deze opgeslagen arbeid noemen we *potentiële energie*, E_{pot} . *Energie* is wat een voorwerp krijgt als er arbeid op verricht wordt. Als een voorwerp veel energie heeft, kan het hiermee veel arbeid verrichten (kracht uitoefenen over een bepaalde afstand).

De potentiële energie is afhankelijk van de plaats van een voorwerp. Als een voorwerp van A naar B verplaatst, zal zijn potentiële energie veranderen:

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_B - E_A \quad (5.5)$$

De veranderingen van potentiële energie zijn vaak eenvoudig te meten. De absolute waarde van een potentiële energie op een bepaald punt is vaak lastiger te meten. Hiervoor is een referentiepunt nodig.

In het algemeen geldt dat de verandering van potentiële energie gelijk is aan minus de arbeid die de conservatieve kracht levert terwijl het voorwerp van A naar B gaat:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{F}_{\text{cons}} \cdot \Delta \vec{s} \quad (5.6)$$

Hierin is $\Delta \vec{s}$ de vectoriële verplaatsing tussen A en B.

5.2.1 Zwaarte-energie

Zwaartekracht is een voorbeeld van een conservatieve kracht. Als we een voorwerp in een zwaartekrachtsveld verplaatsen zal dit een verandering in potentiële energie met zich mee brengen:

$$\Delta E_z = -\vec{F}_z \cdot \Delta \vec{h} \quad (5.7)$$

Zodra we een voorwerp omhoog tillen, wijzen \vec{F}_z en \vec{h} in tegen gestelde richting en levert het inproduct dus een extra minteken op:

$$\Delta E_z = - - F_z \Delta h \quad (5.8)$$

Ofwel:

$$\Delta E_z = mg \Delta h \quad (5.9)$$

Dit wordt ookwel de *zwaarte-energie* genoemd.

Bij potentiële energie is altijd een referentiepunt nodig waar we de energie weten. Voor alle andere punten kunnen we met dit referentiepunt bepalen wat de potentiële energie is *in vergelijking met het referentiepunt*.

Voor zwaarte-energie nemen we als referentiepunt altijd het laagst gelegen punt. Hier stellen we dat de hoogte h nul is, en daarmee de potentiële energie op dat punt ook. Als we nu een

voorwerp vanuit het referentiepunt een hoogte h omhoog verplaatsen krijgt het voorwerp een potentiële energie die gelijk is aan:

$$\Delta E_z = mg \Delta h \quad (5.10)$$

$$E_{z,h} - E_{z,0} = mgh - mg0 = mgh \quad (5.11)$$

In veel situaties is het referentiepunt duidelijk te zien. Vaak wordt vergelijking (5.9) dan ook geschreven als:

$$E_z = mgh \quad (5.12)$$

Voorbeeld 5.3

Een man tilt een boek van 1,0 kg 1,0 m van de grond op.

► Hoeveel energie krijgt het boek?

We kiezen de grond als referentiepunt waar $h = 0$. Hierdoor zien we dat het boek aanvankelijk geen energie had. Daarna wordt het boek 1,0 m boven het referentiepunt geplaatst. Het boek krijgt dus energie:

$$E_z = mgh = 1,0 \cdot 9,81 \cdot 1,0 = 9,8 \text{ J}$$

De man doet dit nogmaals maar nu terwijl hij in een flat op 10 m hoogte staat.

► Hoeveel energie krijgt het boek nu?

Dit maakt voor het antwoord niets uit. We nemen als referentiepunt hoogte 10 m, en stellen dit als $h = 0$. Het boek wordt nu naar hoogte 11 m getilt, 1,0 m hoger dan het referentiepunt ofwel, $h = 1,0$ m. Waardoor ons antwoord onveranderd blijft.

Voorbeeld 5.4

We zetten een vaas van $m = 1,2$ kg, 1,0 m lager op de grond.

► Wat is de energieverandering van de vaas?

We stellen de grond op hoogte $h = 0$, waar de vaas zodoende geen potentiële energie heeft. Aanvankelijk had de vaas een potentiële energie:

$$E_{z,i} = mgh = 1,2 \cdot 9,81 \cdot 1,0 = 12 \text{ J}$$

De vaas ondergaat een verandering in potentiële energie:

$$\Delta E_z = E_{z,f} - E_{z,i} = 0 - 12 = -12 \text{ J}$$

Het minteken zegt ons dat de vaas energie verliest.

Omdat zwaartekracht een conservatieve kracht is maakt het dus niet uit of, als we naar de andere kant van een berg willen, om de berg heen te lopen of er overheen te gaan. De arbeid die we moeten leveren om de berg op te gaan krijgen we weer terug bij de afdaling.

In werkelijkheid ligt dit natuurlijk niet zo simpel. In realiteit hebben we altijd te maken met wrijvingskrachten, dit zijn non-conservatieve krachten. De arbeid die het kost om wrijvingskracht te overwinnen krijgen we niet terug. In realiteit zal de langste weg dus de meeste energie kosten omdat de wrijvingskracht dan de meeste arbeid verricht.

In het algemeen geldt dat potentiële energie een vorm van energie is die opgeslagen kan worden. Als je een boek optilt en deze bovenop een kast legt heeft het boek potentiële energie. Deze energie is er een maand later nog steeds. Alle vormen van potentiële energie zijn op te slaan zonder dat deze “weglekken”. De energie kan op ieder moment gebruikt worden om omgezet te worden in andere vormen van energie.

5.3 Kinetische energie

We weten uit de Tweede wet van Newton dat krachten in staat zijn voorwerpen te versnellen zolang er een kracht werkt. Door deze versnelling zal een voorwerp dus een steeds grotere snelheid krijgen. Als we stoppen met het zetten van kracht zegt de Eerste wet van Newton ons dat het voorwerp door gaat met deze snelheid.

Om het voorwerp te versnellen duwen we over een bepaalde afstand tegen het voorwerp aan waardoor het zal beginnen te bewegen. Blijkbaar zit er dus energie in beweging.

We bekijken de arbeid die nodig is om een voorwerp, wat aanvankelijk in rust is, te versnellen:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F\Delta s \\ &= ma\Delta s\end{aligned}$$

We weten echter uit de bewegingsvergelijkingen dat, voor een versnelling uit stilstand, $\Delta s = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$. Dit invullen levert:

$$\begin{aligned}\Delta W &= ma\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(a\Delta t)^2\end{aligned}$$

Vervolgens realiseren we ons, wederom uit de bewegingsvergelijkingen dat $\Delta v = a\Delta t$, waarbij $\Delta v = v_{\text{eind}} - v_{\text{begin}}$, met in ons geval $v_{\text{begin}} = 0$ waardoor $\Delta v = v_{\text{eind}} = v$, ofwel:

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.13)$$

De arbeid, ΔW , die verricht is is omgezet in bewegingsenergie die we de *kinetische energie*, E_{k} , noemen.

Kinetische energie is geen potentiële energie, er is immers geen conservatieve kracht welke de oorzaak is van kinetische energie.

5.4 Energiebehoud

In de natuurkunde is men altijd opzoek naar behouden grootheden. Grootheden die voor- en na een bepaald proces hetzelfde zijn gebleven. Energie is zo'n grootheid. De totale energiebalans van een gesloten systeem voor- en na een *energieomzetting* is precies hetzelfde, in andere woorden *energie gaat nooit verloren*.

Of in formulevorm:

$$E_{\text{voor}} = E_{\text{na}} \quad (5.14)$$

Soms wordt ook wel geschreven:

$$\Delta W_{if} + E_{\text{k},i} + E_{\text{p},i} = E_{\text{k},f} + E_{\text{p},f} \quad (5.15)$$

Waarbij de i voor *initial* (begin) staat en f voor *final* (eind). We maken hier een onderscheid tussen potentiële energie en kinetische energie. Ook zien we een arbeidsterm aan de linker kant staan.

ΔW_{if} is de arbeid die door externe, non-conservatieve krachten op het voorwerp uitgeoefend worden terwijl het voorwerp van de beginsituatie naar de eindsituatie gaat. Dit kan bijvoorbeeld wrijving zijn, of iemand die het voorwerp duwt.

Let op dat arbeid ook negatief kan zijn, dit zal het geval zijn bij wrijving. In dat geval staan \vec{F} en \vec{s} tegengesteld aan elkaar, ofwel de hoek ertussen is 180° , vergelijking (5.1) levert dus een minteken. Deze negatieve arbeid zorgt ervoor dat, bijvoorbeeld, de eindsnelheid kleiner is.



Figuur 5.5: Een Fokke en Sukke cartoon uit het *Bèta canon*, bron: <http://www.foksuk.nl>

We bekijken nogmaals de laatste vraag van voorbeeld 3.7. Hier berekenden we met welke snelheid het blokje beneden bij de helling aan kwam. Hiervoor moesten we eerst de versnelling en de tijd uitrekenen voor we de snelheid konden berekenen. Met energiebehoud is dit veel makkelijker.

Voorbeeld 5.5

Het blokje met massa $m = 1,0$ kg lag op een schuine helling met hoek $\alpha = 30^\circ$ op een hoogte van $h = 30$ cm.

► Wat is de snelheid die het blokje heeft als het beneden aan komt?

Er vindt de volgende energie omzetting plaats, zwaarte-energie wordt kinetische energie waarbij geen arbeid verricht wordt.

We beginnen met vergelijking (5.14). De energie die we eerst hebben is zwaarte-energie $E_{\text{voor}} = E_z$, de energie die we na de omzetting hebben is kinetische energie $E_{\text{na}} = E_k$.

$$E_z = E_k$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

We zien dat de massa er uit valt en we kunnen oplossen voor de snelheid:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,30} = 2,4 \text{ m s}^{-1}$$

We gebruiken hier een hoogte van 30 cm omdat dit de afstand is waarop de zwaartekracht en de afstand parallel staan.

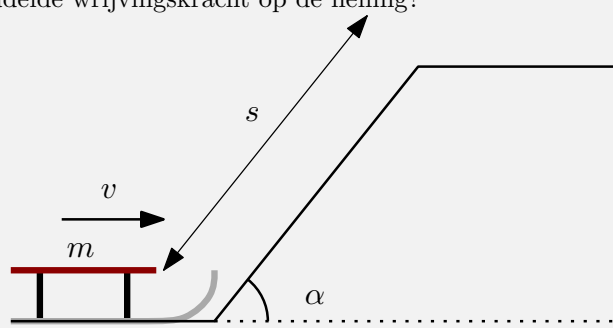
Al met al is dit een veel snellere berekening van de snelheid. Energie is behouden in het proces en de energieomzetting is simpel.

Voorbeeld 5.6

Een slee met massa $m = 55$ kg glijdt met een snelheid van $v = 10 \text{ m s}^{-1}$ een helling met een lengte van $s = 2,0$ m onder een hoek $\alpha = 30^\circ$ op. De slee blijkt boven een snelheid

te hebben van $5,0 \text{ m s}^{-1}$.

► Wat is de gemiddelde wrijvingskracht op de helling?



Een slee komt op een helling af.

We bekijken eerst de energiebalans en kijken hoeveel energie er verloren gaat aan wrijving:

$$E_{\text{voor}} = E_{\text{na}}$$

$$E_{k,i} + W_w = E_{k,f} + E_{z,f}$$

Invullen van $v_i = 10 \text{ m s}^{-1}$, $v_f = 5,0 \text{ m s}^{-1}$ en $h = s \sin(\alpha) = 1,0 \text{ m}$ geeft $W_w = -1,5 \text{ kJ}$.
Voor de weerstandskracht krijgen we hiervoor:

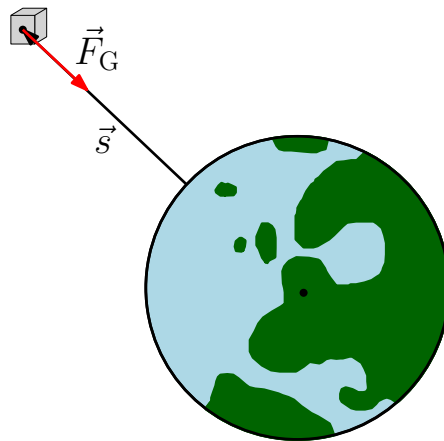
$$F = \frac{W}{s} = \frac{-1,5 \cdot 10^3}{2,0} = -7,6 \cdot 10^2 \text{ N}$$

5.5 Gravitatie energie

We hebben in paragraaf 3.4 gezien dat de gravitatiekracht gegeven wordt door:

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}$$

We weten uit ervaring, denk aan het lanceren van een raket, dat als we een voorwerp van de aarde af willen bewegen, dit arbeid kost. Deze arbeid wordt omgezet in potentiële gravitationele energie.



Figuur 5.6: Een massa valt van oneindig naar de Aarde toe.

Voor deze gravitationele energie kunnen we de hoogte energie E_z niet gebruiken, de valversnelling,

g , zal naar mate we verder van de aarde afkomen steeds verder afnemen.

We zullen dus de formule voor de gravitatiekracht moeten gebruiken. Echter, de sterkte van de gravitatiekracht is afhankelijk van de plaats, F_G is immer afhankelijk van r .

De *potentiële gravitationele energie* wordt gegeven door:

$$E_G = -G \frac{Mm}{r} \quad (5.16)$$

Een afleiding van deze vergelijking is alleen te doen met behulp van integraalberekening en is daarom te vinden in het intermezzo hieronder.

Intermezzo

We bekijken hoeveel arbeid het kost om een voorwerp vanaf het aardoppervlak, R naar oneindig te brengen, zie figuur 5.6.

We beginnen met het invullen van de gravitatie kracht, (3.4), in de formule voor potentiële energie, (5.6):

$$\Delta E_G = -\vec{F}_G \cdot \Delta \vec{s} \quad (5.17)$$

We zien nu in dat de afgelegde weg \vec{s} gelijk is aan de verandering in posities \vec{r} . En omdat \vec{F}_G tegengesteld is aan \vec{r} levert het inproduct een extra minteken ofwel:

$$\Delta E_G = -\vec{F}_G \cdot \Delta \vec{r} = F_G \Delta r \quad (5.18)$$

Omdat de gravitatiekracht een functie is van de afstand bekijken we kleine energiebijdragen dE_{pot} voor kleine stapjes dr :

$$dE_G = F_G dr \quad (5.19)$$

Waarna we de vergelijking integreren van het oppervlak R tot oneindig:

$$\int dE_G = \int_R^\infty F_G dr \quad (5.20)$$

Na het invullen van F_G kunnen we de integraal uitrekenen:

$$\Delta E_G = \int_R^\infty G \frac{Mm}{r^2} dr = -G \frac{Mm}{r} \Big|_R^\infty = G \frac{Mm}{R} \quad (5.21)$$

Waarin ΔE_G gelijk is aan het verschil in energie in oneindig en op afstand R :

$$E_{G,\infty} - E_{G,R} = G \frac{Mm}{R} \quad (5.22)$$

Om de energie op punt R te bepalen hebben we echter een referentiepunt nodig. Voor de gravitationele energie zeggen we dat de potentiële gravitationele energie in oneindig gelijk is aan nul, de zwaartekracht is hier immers ook nul:

$$0 - E_{G,R} = G \frac{Mm}{R} \quad (5.23)$$

Deze vergelijking herschrijven lijkt ons tot vergelijking (5.16):

$$E_G = -G \frac{Mm}{r} \quad (5.24)$$

De energie is dus negatief. We realiseren ons dat energie behouden is. De massa heeft in oneindig geen enkele vorm van energie, het ondervindt n et geen kracht en heeft geen snelheid

etc. Toch heeft de massa aan het eind, als het tegen de aarde aan botst, kinetische energie. Dit is ogenschijnlijk met elkaar in tegenspraak. Echter de energiebalans vlak voordat de massa de aarde raakt komt toch op nul uit. De massa heeft positieve kinetische- en negatieve gravitationele energie.

De gravitatie energie is een vorm van potentiële energie. Deze komt vrij als we met het krachtenveld mee bewegen en moet terug gegeven worden als we uit het krachtenveld vandaan willen bewegen.

De snelheid die we moeten hebben om te ontsnappen aan de gravitatiekracht van een voorwerp wordt de *ontsnappingsnelheid* genoemd. Hoe deze berekend wordt staat in onderstaand voorbeeld.

Voorbeeld 5.7

Theoretisch is het mogelijk om in een keer van de aarde “af te springen”. We gaan er vanuit dat er geen wrijving is en dat de zon een verwaarloosbare gravitationele invloed heeft.

► Wat is de ontsnappingsnelheid van de aarde?

We gebruiken energiebehoud:

$$\begin{aligned} E_{\text{voor}} &= E_{\text{na}} \\ E_k + E_G &= 0 \end{aligned}$$

We zien hier meteen dat gravitatie energie wel negatief moet zijn om de vergelijking kloppend te maken.

We vullen de vergelijking verder in en vereenvoudigen deze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} &= 0 \\ \frac{1}{2}v^2 &= G\frac{M_A}{R_A} \end{aligned}$$

Waaruit volgt:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} = 11 \text{ km s}^{-1}$$

► Wat is de snelheid waarmee een meteoriet vanuit oneindig met een beginsnelheid van 0 m s^{-1} uiteindelijk op aarde valt?

Vanwege behoud van energie moet dit het zelfde zijn als de ontsnappingsnelheid van de aarde, $v = 11 \text{ km s}^{-1}$.

5.6 Vermogen

Het vermogen is gedefinieerd als de hoeveelheid energie die per seconde omgezet wordt:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (5.25)$$

De eenheid van vermogen is joule per seconde wat we *watt* (W) noemen, vernoemd naar de Engelsman James Watt (1736 - 1819).

Ook hier kunnen we de limiet nemen voor kleine Δt :

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{dE}{dt} \quad (5.26)$$

Voorbeeld 5.8

Bij het wereldrecord op de 100 m versnelde Carl Lewis in 1984 over 30 m van 0 naar $11,7 \text{ m s}^{-1}$, hij woog toen 80 kg.

► Wat was het vermogen dat Lewis leverde? (negeer wrijvingskrachten)

We moeten hiervoor vergelijking (5.25) uitrekenen. We zien in dat de enige vorm van energie kinetische energie is:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 5,5 \text{ kJ}$$

Om de tijd te berekenen gebruiken we vergelijking (2.8) voor een versnelling vanuit stilstand waarmee we de tijd uitrekenen:

$$x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

Voor de versnelling a gebruiken we vergelijking (2.5):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Welke we invullen

$$x = \frac{1}{2}\Delta v \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2x}{\Delta v} = 5,1 \text{ s}$$

Waarna we voor het vermogen krijgen:

$$P = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = 1,1 \text{ kW}$$

In werkelijkheid versnelde Carl Lewis niet eenparig maar versneld en lag zijn vermogen hoger, op ongeveer 1,4 kW.

Als we voor de energieverandering de arbeid invullen krijgen we:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} \\ &= \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Ofwel:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.27)$$

Merk op dat vermogen geen richting heeft omdat er een inproduct tussen \vec{F} en \vec{v} is.

Ofwel:

$$P = Fv \cos(\alpha) \quad (5.28)$$

Voorbeeld 5.9

Een auto ondervindt 0,40 kN rolweerstand en 1,2 kN luchtweerstand. De auto rijdt met een constante snelheid van 90 km h^{-1} .

► Wat is het vermogen van de auto?

De totale weerstandskracht is $1,6 \cdot 10^3 \text{ N}$. Omdat de auto met een constante snelheid gaat weten we via de Eerste wet van Newton dat de auto zelf ook zoveel kracht moet leveren.

De snelheid van de auto is $90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 90 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}$.

We zien dat de snelheid en de kracht van de auto beiden parallel in dezelfde richting

wijzen, we hebben dus geen hoeken of mintekens om rekening mee te houden. Ofwel:

$$P = Fv = 1,6 \cdot 10^3 \cdot 25 = 40 \text{ kW}$$

Hoofdstuk 6

Impuls

Zoals in paragraaf 3.2 vermeld was is $F_{\text{net}} = ma$ niet de manier waarop Newton zijn wet geformuleerd had. Hij gebruikte voor zijn Tweede wet het begrip *impuls*.

Het begrip impuls speelt een ontzettend belangrijke rol in de klassieke en moderne natuurkunde. Later zal blijken dat impuls, net als energie, een behouden grootte is waardoor het van essentieel belang is in ons begrip over de natuur.

6.1 De impulsvergelijking

Impuls kan gezien worden als *de hoeveelheid beweging die een voorwerp heeft*. Impuls is uit te rekenen als:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (6.1)$$

Impuls heeft eenheid kg m s^{-1} . Een bowlingbal die met 1 m s^{-1} gaat heeft meer *beweging* dan een golfbal met dezelfde snelheid. Tegelijkertijd heeft een golfbal die met 100 m s^{-1} gaat veel meer beweging dan een golfbal die met 1 m s^{-1} gaat.

Impuls is niet hetzelfde als kinetische energie. Een appel van $0,10 \text{ kg}$ die met 10 m s^{-1} gaat heeft evenveel impuls maar veel meer energie dan een zak appels van 10 kg die met $0,10 \text{ m s}^{-1}$ gaat.

Impuls is een maat voor beweging en geen (directe) maat van energie. Het is een eigenschap die langzaam betekenis zal krijgen.

De Tweede wet van Newton was oorspronkelijk geformuleerd met het begrip impuls:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.2)$$

Waaruit eenvoudig onze vorige formulering volgt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Waarbij we er vanuit gaan dat de massa constant blijft, net als in de Tweede wet van Newton. Een andere manier om naar beweging te kijken is door te kijken naar de verandering van de hoeveelheid beweging.

We beginnen met een bepaalde impuls en voegen hier extra beweging aan toe in de vorm van

snelheid. Deze verandering van beweging zullen we *stoot*, \vec{J} , noemen:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \Delta\vec{p} \\ &= m\Delta\vec{v} \\ &= m\vec{a}\Delta t\end{aligned}\quad (6.3)$$

Hierin herkennen we de Tweede wet van Newton waarmee we voor de stoot krijgen:

$$\vec{J} = \vec{F}\Delta t \quad (6.4)$$

Of als we het helemaal netjes doen in de limiet voor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (6.5)$$

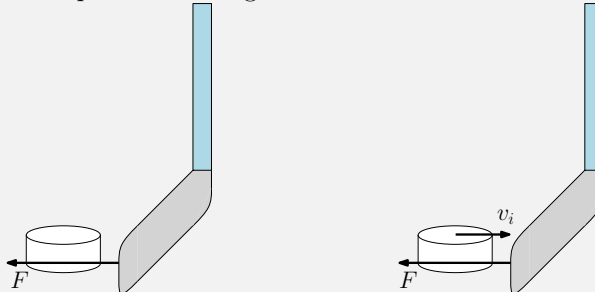
We zien in de vergelijkingen dat stoot en impuls eigenlijk het zelfde zijn. Ze hebben dezelfde richting en eenheid. Toch bestaat er een subtiel verschil tussen de twee. Impuls is de hoeveelheid beweging die een voorwerp heeft mv . Stoot is de verandering van de hoeveelheid beweging onder invloed van een kracht $F\Delta t$.

In het Engels hebben impuls en stoot precies omgekeerde namen. Impuls heet in het Engels *momentum* en stoot *impulse*.

Voorbeeld 6.1

We bekijken een ijshockeyspeler die een stilstaande puck van massa $m = 100$ g wegslaat. Hij zet hiervoor gedurende $t = 0,025$ s 100 N kracht.

► Hoe hard gaat de puck na de slag?



Een ijshockeypuck wordt weggeslagen.

Een ijshockeypuck wordt teruggeslagen.

De stoot die de puck ondervindt is:

$$J = F\Delta t = 100 \cdot 0,025 = 2,5 \text{ N s} \quad (6.6)$$

Deze stoot wordt omgezet in beweging p .

De snelheid die de puck dus krijgt is

$$v = \frac{J}{m} = \frac{2,5}{0,100} = 25 \text{ m s}^{-1} \quad (6.7)$$

► Wat was de versnelling van de puck?

We weten dat de beginsnelheid 0 was, na $0,025$ s is de snelheid 25 m s^{-1} ofwel:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25}{0,025} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-2} \quad (6.8)$$

De puck wordt vervolgens door een teamgenoot terug geslagen, zie rechter figuur. De puck heeft beginsnelheid $v_i = -25 \text{ m s}^{-1}$ en heeft daarna een snelheid $v_f = 35 \text{ m s}^{-1}$. Hiervoor wordt 200 N kracht gezet.

► Hoelang zijn de stick en de puck met elkaar in aanraking?

De impuls die de puck aan het begin had was

$$p_i = mv_i = 0,100 \cdot -25 = -2,5 \text{ kg m s}^{-1} \quad (6.9)$$

De impuls na de klap is:

$$p_f = mv_f = 0,100 \cdot 35 = 3,5 \text{ kg m s}^{-1} \quad (6.10)$$

Er is dus een totale impulsverandering $\Delta p = p_f - p_i = 6,0 \text{ kg m s}^{-1}$. Deze wordt veroorzaakt door een stoot, zie vergelijking (6.3), ofwel:

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{6,0}{200} = 30 \text{ ms} \quad (6.11)$$

In het voorgaande voorbeeld gingen we er vanuit dat bij een impulsverandering de snelheid veranderde. De massa kan echter ook variëren:

Voorbeeld 6.2

Een ruimteschip met een massa van $m = 1,5 \cdot 10^4 \text{ kg}$ stoot, vanuit stilstand, per seconde 50 kg verbrandingsgassen uit die het ruimteschip met een snelheid van $v = 90 \text{ m s}^{-1}$ verlaten.

► Wat is de versnelling van het ruimteschip? Je mag hierbij de massa afname van het ruimteschip zelf negeren.

Allereerst gaan we kijken naar de kracht die op het ruimteschip werkt:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = v \frac{\Delta m}{\Delta t} = 90 \cdot 50 = 4,5 \text{ kN}$$

Via de Tweede wet van Newton kunnen we hiermee de versnelling berekenen: $a = 0,30 \text{ m s}^{-2}$.

6.2 Impulsbehoud

Impuls is een begrip wat erg belangrijk is bij botsingen. Twee voorwerpen botsen tegen elkaar, oefenen daarbij gelijke maar tegengestelde krachten op elkaar uit (Derde wet van Newton) en gaan daarna met een andere snelheid verder. Impulsoverdracht speelt hierin een essentiële rol. We zullen nu gaan zien dat impuls voor en na een botsing behouden blijft.

We beschouwen twee voorwerpen die wrijvingsloos recht op elkaar af bewegen. Uit de Eerste wet van Newton weten we dat een voorwerp dat in rust is geen netto kracht ervaart ofwel beide voorwerpen zijn in rust.

Vervolgens botsen de twee voorwerpen. Ze oefenen kracht op elkaar uit volgens de Derde wet van Newton.

Even later vliegen de voorwerpen weer ieder op hun eigen weg verder, er werken geen krachten op de voorwerpen dus ze zijn weer in rust.

We gaan er vanuit dat er tijdens het hele proces geen arbeid verricht wordt.

Voor de botsing is er dus een bepaalde impuls

$$\vec{p}_{i,\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Tijdens de botsing oefenen voorwerp 1 en 2 kracht op elkaar uit, hierdoor ontvangen beiden een stoot $J = F\Delta t$. Voor voorwerp 1 is dit:

$$\vec{J}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \Delta t$$

Maar door de Derde wet van Newton weten we ook:

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

Waarmee geldt:

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 &= \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \Delta t = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \Delta t = -\vec{J}_2 \\ \Rightarrow \vec{J}_1 &= -\vec{J}_2 \end{aligned}$$

De impuls na de botsing is dus

$$\begin{aligned} \vec{p}_{f,\text{tot}} &= (\vec{p}_1 + \vec{J}_1) + (\vec{p}_2 + \vec{J}_2) \\ &= (\vec{p}_1 + \vec{J}_1) + (\vec{p}_2 - \vec{J}_1) \\ &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{i,\text{tot}} \end{aligned}$$

De totale impuls voor- en na de botsing is dus het zelfde, impuls is behouden:

$$\sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}_f \quad (6.12)$$

6.3 Elastische botsingen

Een elastische botsing is een botsing waarbij de totale impuls én kinetische energie behouden blijven. Het tegengestelde van de elastische botsing is de *inelastische* botsing waarin impuls wel, maar *kinetische* energie niet behouden is (de totale energie is echter in beiden behouden).



Figuur 6.1: Een lineaire elastische botsing met even zware massa's.

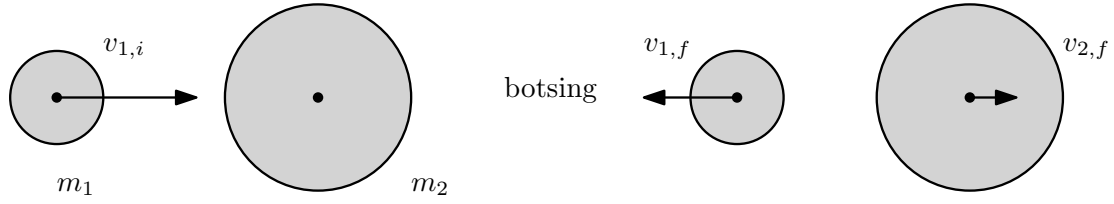
We bekijken twee gelijke massa's m_1 en m_2 . Massa 2 staat aanvankelijk stil en massa 1 komt met snelheid $v_{1,i}$ op massa 2 af. De massa's botsen elastisch. Met impulsbehoud kunnen we uitrekenen wat de eindsnelheid van massa 2 is.

We beginnen vergelijking (6.12) in te vullen:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} &= m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \\ m_1 v_{1,i} + 0 &= m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \end{aligned}$$

Behalve dat impuls behouden moet blijven moet ook kinetische energie behouden blijven. We kunnen dus, vanwege het kwadraat in de kinetische energie, niet zomaar zeggen dat beide voorwerpen de helft van $v_{1,i}$ krijgen. De enige oplossing is dat m_1 tot stilstand komt en dat m_2 doorgaat met snelheid $v_{2,f} = v_{1,i}$.

Dit was een simpel voorbeeld. We gaan nu naar een ingewikkelder voorbeeld kijken waarbij



Figuur 6.2: Een lineaire elastische botsing met ongelijke massa's.

de massa's niet gelijk zijn:

De totale impuls en energie blijven behouden. Hiermee kunnen we twee vergelijkingen maken.

Aangezien we twee onbekenden hebben is dit dus op te lossen.

De vergelijkingen die we op moeten lossen zijn:

Voor impuls:

$$m_1 v_{1,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \quad (6.13)$$

En voor energie:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \quad (6.14)$$

Uit (6.13) halen we:

$$v_{2,f} = \frac{m_1 (v_{1,i} - v_{1,f})}{m_2} \quad (6.15)$$

Nu vullen we (6.15) in in (6.14)

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 (v_{1,i} - v_{1,f})}{m_2} \right)^2$$

Waarna we gaan herschrijven:

$$\begin{aligned} v_{1,i}^2 &= v_{1,f}^2 + \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{m_1}{m_2} (v_{1,i} - v_{1,f}) \right)^2 \\ v_{1,i}^2 &= v_{1,f}^2 + \frac{m_1}{m_2} (v_{1,i} - v_{1,f})^2 \\ v_{1,i}^2 - v_{1,f}^2 &= \frac{m_1}{m_2} (v_{1,i} - v_{1,f})^2 \\ (v_{1,i} - v_{1,f})(v_{1,i} + v_{1,f}) &= \frac{m_1}{m_2} (v_{1,i} - v_{1,f})^2 \\ (v_{1,i} + v_{1,f}) &= \frac{m_1}{m_2} (v_{1,i} - v_{1,f}) \end{aligned}$$

Het uitschrijven van de haakjes en oplossen voor $v_{1,f}$ en $v_{2,f}$ geeft na enig rekenwerk:

$$v_{1,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \quad (6.16)$$

en

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \quad (6.17)$$

Met deze resultaten kunnen we drie limieten onderscheiden:

$$\begin{array}{lll} m_1 \ll m_2 & \lim_{m_1 \rightarrow 0} & v_{1,f} = -v_{1,i} \quad v_{2,f} = 0 \\ m_1 = m_2 & & v_{1,f} = 0 \quad v_{2,f} = v_{1,i} \\ m_1 \gg m_2 & \lim_{m_2 \rightarrow 0} & v_{1,f} = v_{1,i} \quad v_{2,f} = 2v_{1,i} \end{array}$$

Voorbeeld 6.3

In een kogelbotsysteem (zie paragraaf 6.3.1) hangt een stalen bal met een massa van $m_s = 6,00$ kg en een plastic bal met een massa van $m_p = 0,160$ kg. De stalen bal botst op de plastic bal met een snelheid van $v_{s,i} = 1,50$ m s⁻¹.

► Wat is de eindsnelheid van beide ballen?

We zullen vergelijkingen (6.16) en (6.17) uit moeten rekenen.

Voor de stalen bal geldt:

$$v_{s,f} = \frac{m_s - m_p}{m_s + m_p} v_{s,i} = \frac{6,00 - 0,160}{6,00 + 0,160} \cdot 1,50 = 1,42 \text{ m s}^{-1}$$

Voor de plastic bal geldt:

$$v_{p,f} = \frac{2m_s}{m_s + m_p} v_{s,i} = 2,92 \text{ m s}^{-1}$$

De snelheden zijn bijna in overeenstemming met de limieten van hierboven.

Voorbeeld 6.4

We laten een basketbal van massa $m_B = 500$ g met daar bovenop een tennisbal met massa $m_T = 50,0$ g samen van 1,00 meter hoogte vallen.

We bekijken de botsing vanaf het oppervlak van de basketbal, welke in ons systeem nagenoeg stil staat zodat bovenstaande vergelijkingen toepasbaar zijn.

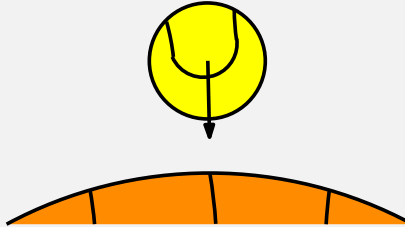
► Wat is de eindsnelheid van de tennisbal?

Omdat de vanaf het oppervlak van de basketbal kijken kunnen we stellen dat deze eigenlijk stil staat, $v_{B,i} = 0$ m s⁻¹.

De beginsnelheid van de tennisbal kan bepaald worden met behulp van de Wet van behoud van energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{voor}} &= E_{\text{na}} \\ E_z &= E_k \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1,00} = 4,43 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

We bekijken de botsing vanaf het oppervlak van de basketbal. In ons stelsel lijkt de tennisbal dus met twee keer deze snelheid op ons af te komen.



De tennisbal komt, gezien vanaf de basketbal, met een twee keer zo hoge snelheid aan. Nu kunnen we met behulp van vergelijking (6.16) de eindsnelheid van de tennisbal berekenen:

$$v_{T,f} = \frac{m_T - m_B}{m_T + m_B} v_{T,i} = \frac{0,0500 - 0,500}{0,0500 + 0,500} \cdot 8,86 = -7,24 \text{ m s}^{-1}$$

Vanaf de basketbal gezien spring de tennisbal er dus met een twee keer zo hoge snelheid vanaf, volledig in overeenstemming met de limiet.

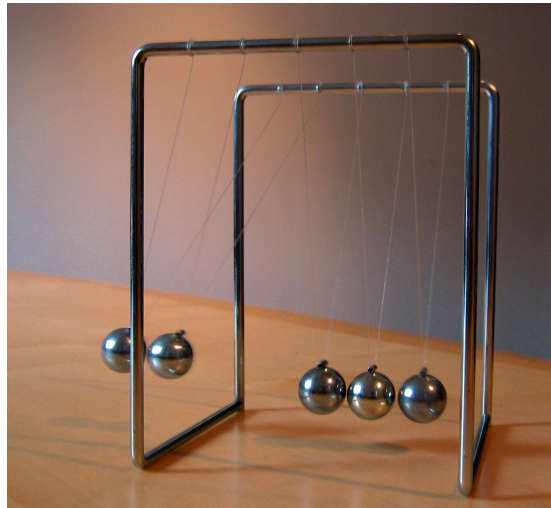
Bekijken we de botsing echter vanaf de grond, dan moeten we hier de snelheid van de basketbal nog bijop tellen, we bewegen immers met de basketbal mee.

De snelheid van de basketbal was na de stuiter met de grond ook $-4,43 \text{ m s}^{-1}$. De tennisbal heeft dus een eindsnelheid van $-11,7 \text{ m s}^{-1}$.

Bovenstaand voorbeeld oogt omslachtig, we moesten ons immers eerst verplaatsen naar het frame van de basketbal. In paragraaf 6.5 zullen we zien dat dit eenvoudiger kan en voorbeeld 6.8 zal het probleem nogmaals behandelen.

6.3.1 Kogelbotssysteem

Een kogelbotssysteem¹ is een systeem bestaande uit vijf identieke kogels welke om dezelfde hoogte hangen en met elkaar kunnen botsen, zie figuur 6.3. Het is een systeem is zo gemaakt dat de kogels met elkaar kunnen botsen zonder te rollen. Rollende voorwerpen, zie paragraaf 8.4, bevatten namelijk ook rotatie energie waardoor de botsingen niet mooi elastisch zijn.



Figuur 6.3: Een kogelbotssysteem.

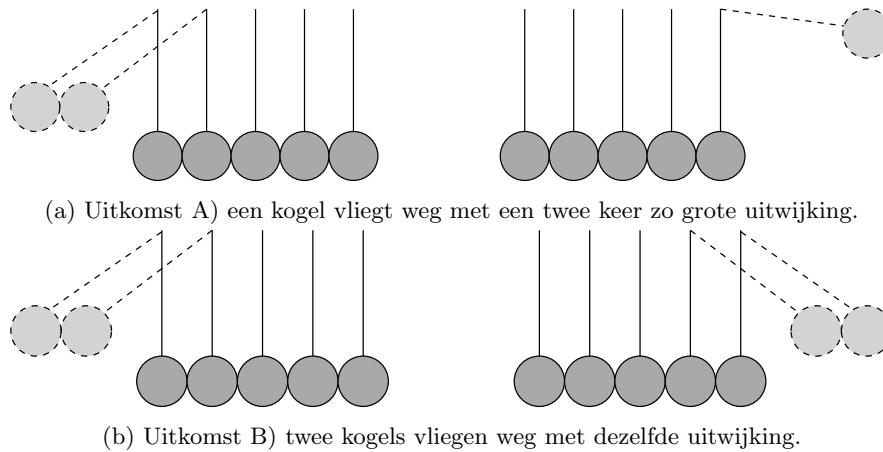
Om het kogelbotssysteem goed te laten werken is het belangrijk dat de kogels even zwaar zijn en netjes uitgelijnd zijn.

Als een kogel een uitwijking krijgt en met de andere vier botst is te zien dat de middelste drie stil blijven hangen maar de uiterste kogel een uitwijking krijgt welke even groot is als die van de eerste. Tegelijkertijd is de eerste kogel volledig tot stilstand gekomen. Perfect in overeenstemming met het tweede “limiet”geval.

Als er twee kogels een uitwijking krijgen en botsen met de overige drie *lijken* er twee oplossingen te zijn A) een kogel schiet weg met een twee keer zo grote uitwijking en B) twee kogels schieten weg met dezelfde uitwijking als de eerste, zie figuren 6.4.

Uitkomst A) is echter niet waar, deze uitkomst is in overeenstemming met de Wet van behoud van energie, maar niet met de Wet van behoud van impuls. Alleen uitkomst B) is in overeenstemming met beide wetten.

¹In het Engels *Newtons cradle*

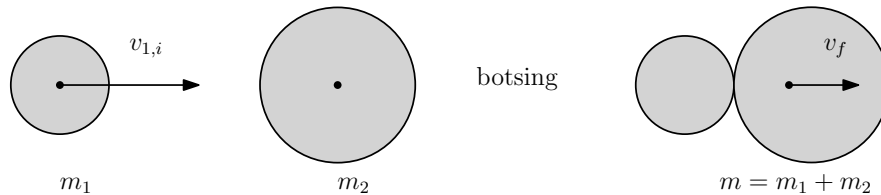


Figuur 6.4: Twee schijnbaar mogelijke uitkomsten van een botsing met een kogelbotstelsysteem.

6.4 Inelastische botsingen

Een andere soort botsing is de *inelastische botsing*. Bij dit type botsing blijft de *kinetische* energie niet behouden maar de totale energie en de impuls wel.

Een volkomen inelastische botsing is de meest extreme variant die we steeds zullen gebruiken. Twee voorwerpen botsen, kleven samen en bewegen samen verder. Zie figuur 6.5.



Figuur 6.5: Een volkomen inelastische botsing. Merk op dat het zwaartepunt verplaatst is omdat we met een nieuw voorwerp te maken hebben.

Laten we er vanuit gaan dat massa 1, $m_1 = 1,0$ kg met een snelheid $v_{1,i} = 5,0$ m s⁻¹ en massa 2 $m_2 = 2,2$ kg zonder beginsnelheid.

Na de botsing is de totale massa $m = m_1 + m_2 = 3,2$ kg met een onbekende snelheid.

We weten dat de kinetische energie niet behouden is, omdat we niet weten hoeveel kinetische energie er dan omgezet wordt kunnen we deze vergelijking eigenlijk niet gebruiken.

We weten dat de totale impuls wel behouden blijft, we vullen dus wederom vergelijking (6.12) in:

$$m_1 v_{1,i} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$1,0 \cdot 5,0 = 3,2 \cdot v_f$$

Waaruit volgt dat $v_f = 1,56$ m s⁻¹.

Dit wetende kunnen we gaan kijken naar hoeveel kinetische energie er dan verloren is gegaan.

$$E_{k,i} + \Delta Q = E_{k,f}$$

$$12,5 \text{ J} + \Delta Q = 3,91 \text{ J}$$

Er gaat dus $-8,59$ J aan kinetische energie verloren. Deze energie zal zitten in vervorming van de massa's ofwel warmte, ΔQ^2 .

Voor inelastische botsingen geldt:

$$\sum E_{k,i} + \Delta Q = \sum E_{k,f} \quad (6.18)$$

We kunnen hierin drie verschillende situaties onderscheiden:

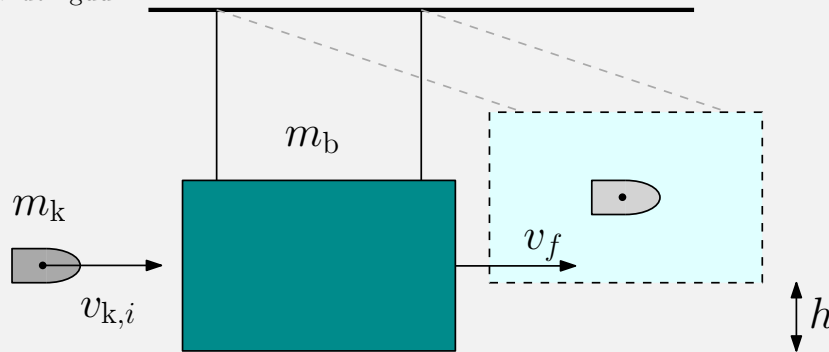
$$\begin{aligned} \Delta Q < 0 & \text{ inelastische botsingen} \\ \Delta Q = 0 & \text{ elastische botsingen} \\ \Delta Q > 0 & \text{ super inelastische botsingen} \end{aligned}$$

Voorbeelden van super inelastische botsingen zijn botsingen waarbij “explosies” plaats vinden. Een massa botst met een staaf dynamiet, het dynamiet ontploft, en zet opgeslagen chemische energie om in onder andere kinetische energie, het gevolg is dat de massa na de botsing met een veel grotere kinetische energie weg vliegt. Ook hier is kinetische energie niet, maar totale energie en impuls wel behouden.

Voorbeeld 6.5

We bekijken een kogel met massa $m_k = 5,00$ g die in een houten blok van massa $m_b = 1,00$ kg geschoten wordt met onbekende snelheid.

Het houten blok hangt aan twee draden waaraan hij wrijvingsloos kan slingeren, zie onderstaande figuur.



Een kogel botst volkomen inelastisch met een houten blok.

Zodra de kogel het blok indringt en tot stilstand komt heeft het blok een snelheid v_f en begint te slingeren, hierbij komt hij tot een hoogte van $h = 5,00$ cm.

► Wat is de snelheid van de kogel geweest?

We weten dat het slingeren van het blok wrijvingsloos gebeurt, uit de hoogte kunnen we dus v_f halen:

$$\begin{aligned} E_k &= E_z \\ \frac{1}{2}(m_k + m_b)v_f^2 &= (m_k + m_b)gh \end{aligned}$$

Waaruit volgt dat $v_f = 0,991$ m s⁻¹.

Dit is *niet* de beginsnelheid van de kogel, maar de eindsnelheid van het blok *en* de kogel ná de botsing.

²We schrijven ΔQ aan de linker kant van het is-teken net als dat we arbeid links van het is-teken in een energiebalans zetten

Via impulsbehoud kunnen we nu de beginsnelheid van de kogel uitrekenen:

$$m_k v_{k,i} = (m_k + m_b) v_f$$

$$5,0 \cdot 10^{-3} \cdot v_{k,i} = 1,005 \cdot 0,991$$

Waaruit volgt dat $v_{k,i} = 199 \text{ m s}^{-1}$.

► Hoeveel energie gaat er “verloren”?

Hiervoor vullen we vergelijking (6.18) in:

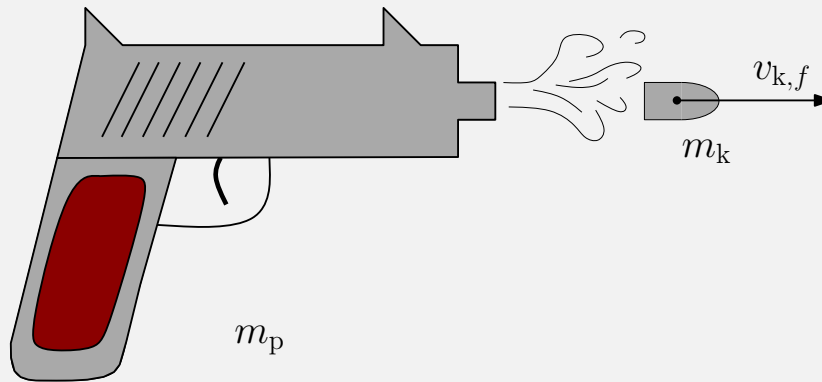
$$\Delta Q = E_{k,f} - E_{k,i}$$

$$= \frac{1}{2} m_k v_{k,i}^2 - \frac{1}{2} (m_k + m_b) v_f^2$$

Waaruit volgt dat $\Delta Q = -98,5 \text{ J}$, zo'n 99% van de totale energie.

Voorbeeld 6.6

We bekijken het afschieten van een kogel als een super inelastische botsing, zie onderstaande figuur.



Een pistool schiet een kogel af.

We weten dat er in de kogel een chemische potentiële energie van $\Delta Q = 250 \text{ J}$ zit. Het pistool heeft massa $m_p = 1,50 \text{ kg}$ en de kogel $m_k = 5,00 \text{ g}$.

► Wat is de eindsnelheid van de kogel?

We beginnen met het invullen van vergelijking (6.18). Waarna we inzien dat:

$$\Delta Q = E_{k,f} + E_{p,f}$$

En we weten via vergelijking (6.12) dat geldt:

$$m_p v_{p,f} + m_k v_{k,f} = 0$$

We laten voor het gemak de indices f weg omdat de beginsnelheden toch 0 zijn. Uit de laatste vergelijking halen we: $v_p = \frac{m_k}{m_p} v_k$ en vullen dit in in de eerste vergelijking:

$$\frac{m_k^2}{m_p} v_k^2 + m_k v_k^2 = 250 \cdot 2$$

$$v_k^2 \left(\frac{m_k^2}{m_p} + m_k \right) = 500 \text{ J}$$

Hieruit volgt dat $v_k = 316 \text{ m s}^{-1}$, waarna uitgerekend kan worden dat $v_p = -1,05 \text{ m s}^{-1}$.

► De loop van het pistool is 10,0 cm lang. Wat is de versnelling van de kogel?

Uit de bewegingsvergelijkingen (2.8) en (2.9) kunnen we halen dat:

$$x = \frac{1}{2} \frac{\Delta v^2}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \frac{v^2}{x}$$

Waarbij $v = v_k - v_p$ omdat het pistool tijdens het afschieten wat achteruit zal bewegen. Ofwel de versnelling is $a = 4,98 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-2}$.

► Wat is dan de kracht op het pistool?

Via de Derde wet van Newton kunnen we de versnelling van het pistool berekenen:

$$F_p = m_p a_p = -m_k a_k$$

Ofwel $F_p = -2,49 \cdot 10^3 \text{ N}$.

We hadden dit ook met de stoot uit kunnen rekenen als:

$$t_{\text{schot}} = \frac{v_k}{a_k}$$

Zo berekenen we dat het schot $6,35 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ duurt.

Vervolgens berekenen we met vergelijking (6.3) de kracht door middel van de stoot:

$$F = \frac{m_p v_p}{t_{\text{schot}}} = -2,49 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Precies het zelfde als via de bewegingsvergelijkingen.

6.5 Center of Mass

De rekenpartij die we in paragraaf 6.3 gezien hebben is veel eenvoudiger na te rekenen. Om dit te doen moeten we ons verplaatsen naar het *Center of Mass frame*, ofwel *CM frame*.

Voordat we dat gaan doen zullen we eerst kijken hoe we het center of mass, ofwel het *zwaartepunt* kunnen bepalen.

6.5.1 Zwaartepunt

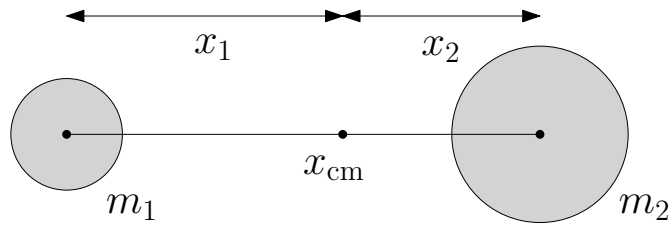
In paragraaf 3.6 hebben we gezien dat krachten altijd aangrijpen in het zwaartepunt. Voor symmetrische, homogene voorwerpen is dit altijd netjes in het midden van het voorwerp. Samengestelde voorwerpen hebben echter ook een zwaartepunt zoals al te zien was in figuur 6.5.

We bekijken twee bollen van verschillende massa, m_1 en m_2 die verbonden zijn met een massaloze staaf. Als we deze staaf op een willekeurige plaats oppakken is de kans groot dat deze zal gaan draaien³. Als we de staaf echter op positie x_{cm} vastpakken, in het *Center of Mass* of *zwaartepunt*, dan zal de staaf niet draaien, zie figuur 6.6.

Als we de zwaartekracht willen tekenen die op het systeem van massa 1, massa 2 en de staaf werkt tekenen we deze pijl vanuit x_{cm} , dit is immers de plek waar de zwaartekracht aangrijpt. Het berekenen van x_{cm} voor twee massa's gaat als volgt:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (6.19)$$

³hoe dit precies in zijn werk gaat wordt uitgelegd in hoofdstuk 8.1.



Figuur 6.6: Het zwaartepunt, x_{cm} , ligt iets dichterbij m_2 omdat deze zwaarder is.

Het gehele systeem van massa's zou ook een snelheid, v_{cm} , kunnen hebben. Deze kunnen we uitrekenen met vergelijking (2.1):

$$v_{\text{cm}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (6.20)$$

Merk op dat v_1 niet perse gelijk hoeft te zijn aan v_2 . In dat geval zit er dus “rek” in de massaloze staaf waardoor de massa's afzonderlijk kunnen bewegen. De afstanden x_1 en x_2 , en daarmee x_{cm} , liggen in dat geval niet vast maar bewegen.

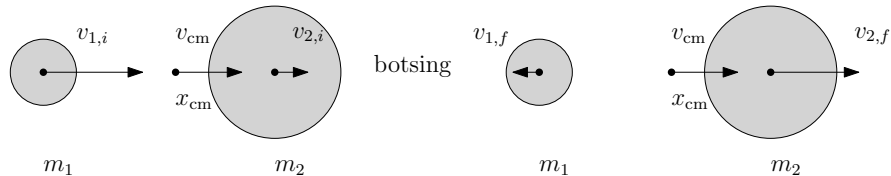
Nu zullen we botsingen vanuit het center of mass gaan bekijken. We volgen dus de snelheid van het center of mass voor en na de botsing. De twee massa's die de botsing ondergaan wisselen *intern* krachten met elkaar uit volgens de Derde wet van Newton. Er zijn dus geen externe krachten. Omdat er geen externe krachten zijn zal er geen stoot op het center of mass uitgeoefend worden, waardoor de impuls van het center of mass niet veranderd. Dit betekent dat de snelheid van het center of mass voor- en na de botsing het zelfde moet blijven.

$$v_{\text{cm},i} = v_{\text{cm},f} \quad (6.21)$$

Van deze eigenschap zullen we hierna gebruik maken.

6.5.2 Elastisch

We bekijken opnieuw een elastische botsing met ongelijke massa's zie figuur 6.7



Figuur 6.7: Een elastische botsing gezien vanuit het lab-frame.

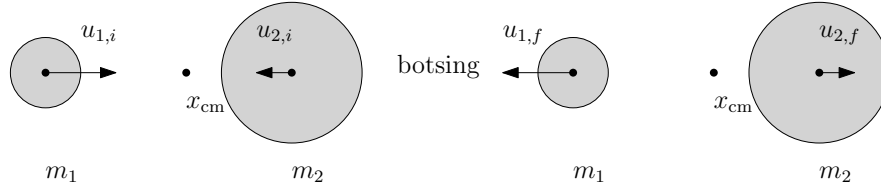
We hadden al eerder gezien dat het bepalen van de eindsnelheden een vreselijke rekenpartij is. We zien dat het center of mass tussen de twee massa's in zit en snelheid v_{cm} heeft. We verplaatsen ons in het *center of mass frame* of *cm-frame*, het frame waar we voorheen in werkten noemen we het *lab-frame*.

In het cm-frame zullen we als het ware “meelopen” met de snelheid van het center of mass. Ofwel, we trekken van alle snelheden de snelheid v_{cm} af. We zullen deze nieuwe snelheden met

een u aangeven om het verschil tussen lab- en cm-frame aan te geven:

$$\begin{aligned}u_{1,i} &= v_{1,i} - v_{\text{cm}} \\u_{2,i} &= v_{2,i} - v_{\text{cm}} \\u_{\text{cm},i} &= v_{\text{cm},i} - v_{\text{cm}} = 0\end{aligned}$$

In het cm-frame ziet de botsing van figuur 6.7 er dus uit zoals in figuur 6.8.



Figuur 6.8: Dezelfde botsing als figuur 6.7 maar dan gezien vanuit het cm-frame.

Maar omdat in het cm-frame het center of mass stil staat ($u_{\text{cm}}=0$) én de kinetische energie behouden blijft én de impuls behouden blijft moet wel gelden dat de massa's na de botsing met dezelfde snelheid omkeren:

$$\begin{aligned}u_{1,f} &= -u_{1,i} \\u_{2,f} &= -u_{2,i}\end{aligned}$$

Waarmee we de volgende set vergelijkingen berekend kan worden:

$$\text{cm: } u_{1,i} = v_{1,i} - v_{\text{cm}} \quad (6.22) \qquad u_{2,i} = v_{2,i} - v_{\text{cm}} \quad (6.25)$$

$$\text{cm: } u_{1,f} = v_{\text{cm}} - v_{1,i} \quad (6.23) \qquad u_{2,f} = v_{\text{cm}} - v_{2,i} \quad (6.26)$$

$$\text{lab: } v_{1,f} = 2v_{\text{cm}} - v_{1,i} \quad (6.24) \qquad v_{2,f} = 2v_{\text{cm}} - v_{2,i} \quad (6.27)$$

Voorbeeld 6.7

We bekijken massa's $m_1 = 1,0$ kg en $m_2 = 5,0$ kg die met snelheden $v_1 = 10$ m s⁻¹ en $v_2 = 3$ m s⁻¹ bewegen en elastisch zullen botsen.

► Wat is de eindsnelheid van beide massa's?

Allereerst rekenen we v_{cm} uit met vergelijking (6.20). Hieruit volgt dat $v_{\text{cm}} = 4,2$ m s⁻¹. Hierna is het mogelijk om met vergelijkingen (6.24) en (6.27) de eindsnelheden uit te rekenen: $v_{1,f} = -1,67$ m s⁻¹ en $v_{2,f} = 5,33$ m s⁻¹.

Precies dezelfde uitkomsten die vergelijkingen (6.16) en (6.17) ons ook geven.

Voorbeeld 6.8

We laten een basketbal van massa $m_B = 500$ g met daar bovenop een tennisbal met massa $m_T = 50,0$ g samen van 1,00 meter hoogte vallen.

► Wat zijn de eindsnelheden van beide ballen?

We weten dat de ballen beiden met dezelfde versnelling vallen omdat de valversnelling onafhankelijk is van de massa. Beide ballen versnellen dus met $a = g = 9,81$ m s⁻² naar beneden en bereiken beiden beneden een snelheid:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = 4,43 \text{ m s}^{-1}$$

Omdat de grond oneindig veel zwaarder is dan de basketbal zal deze met snelheid van $v_{B,f} = -4,43 \text{ m s}^{-1}$ omhoog stuiten.

Het minteken betekent hier dat de bal terug omhoog gaat (we hadden g positief genomen en daarmee beneden als positieve richting gekozen.)

De tennisbal, die nog een snelheid van $v_{T,i} = 4,43 \text{ m s}^{-1}$ heeft, ondergaat een botsing met de basketbal die hem raakt met een snelheid van $-4,43 \text{ m s}^{-1}$ (omhoog), de snelheid van de tennisbal wordt dus gegeven door vergelijking (6.24). Hiervoor rekenen we eerst de center of mass snelheid uit:

$$v_{\text{cm}} = \frac{m_B v_{B,i} + m_T v_{T,i}}{m_B + m_T} = \frac{0,500 \cdot -4,43 + 0,0500 \cdot 4,43}{0,500 + 0,0500} = -3,62 \text{ m s}^{-1}$$

Hiermee wordt de eindsnelheid van de tennisbal:

$$v_{T,f} = 2v_{\text{cm}} - v_{T,i} = 2 \cdot -3,62 - 4,43 = -11,7 \text{ m s}^{-1}$$

De eindsnelheid van de basketbal wordt hiermee:

$$v_{B,f} = 2v_{\text{cm}} - v_{B,i} = 2 \cdot -3,62 - 4,43 = -2,82 \text{ m s}^{-1}$$

De tennisbal schiet er dus bijna drie keer zo snel vanaf terwijl de basketbal nauwelijks snelheid verliest.

6.5.3 Inelastisch

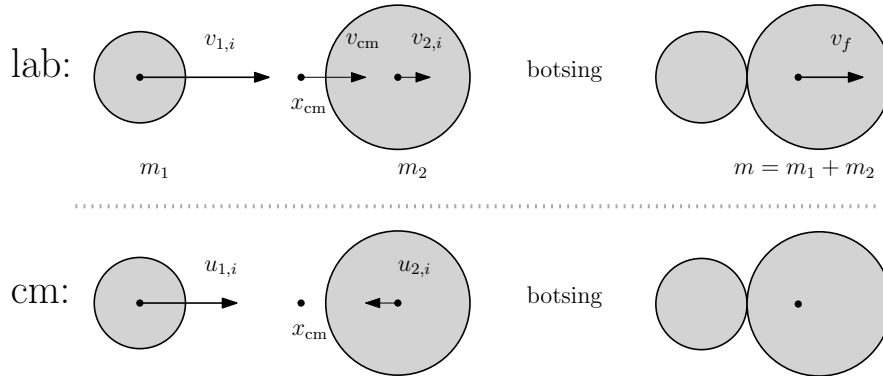
Inelastische botsingen zien er in het cm-frame iets anders uit.

Omdat vergelijking (6.21) nog steeds geldt én omdat de twee voorwerpen sámen doorbewegen moet wel gelden dat beide massa's na de botsing stil staan (zie figuur 6.9):

$$u_{1,f} = u_{2,f} = u_{\text{cm}} = 0$$

Ofwel:

$$v_f = v_{\text{cm}} \quad (6.28)$$



Figuur 6.9: Volkomen inelastische botsing gezien vanuit het lab- en cm-frame.

Hiermee is ook gemakkelijk de “verlorengegene” kinetische energie te berekenen:

$$\Delta Q = -\left(\frac{1}{2}m_1 u_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 u_{2,i}^2\right) \quad (6.29)$$

Waarbij het minteken hier komt omdat we eigenlijk $E_{k,\text{cm},f} - E_{k,\text{cm},i}$ uitrekenen waarbij $E_{k,\text{cm},f} = 0$ en $E_{k,\text{cm},i} = \frac{1}{2}m_1 u_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 u_{2,i}^2$.

6.6 Botsingen in meerdere richtingen

We zien dat vergelijking (6.12) een vectoriële vergelijking is, hij geldt dus voor alle richtingen afzonderlijk. Hiervoor hebben we alleen naar lineaire botsingen gekeken. We gaan nu kijken naar botsingen in meerdere richtingen.

Voor botsingen in meerdere richtingen geldt:

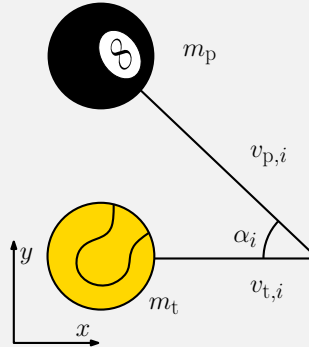
$$\sum p_{x,i} = \sum p_{x,f} \quad (6.30)$$

$$\sum p_{y,i} = \sum p_{y,f} \quad (6.31)$$

Voorbeeld 6.9

We bekijken een poolbal, $m_p = 0,260$ kg, en een tennisbal, $m_t = 0,056$ g, die op elkaar af glijden en elastisch botsen onder een hoek, $\alpha = 30^\circ$, zie onderstaande figuur. De snelheid van de poolbal is $v_{p,i} = 4,00$ m s⁻¹ en die van de tennisbal is $v_{t,i} = 9,00$ m s⁻¹.

► Onder welke hoeken en met welke snelheden vliegen de ballen na de botsing verder?



Een tennisbal en een poolbal botsen onder een hoek.

Allereerst kijken we naar de x -richting:

We rekenen de snelheden voor de x -richting uit:

$$v_{p,i,x} = v_{p,i} \cos(\alpha) = 3,46 \text{ m s}^{-1}$$

We gaan de botsing in het cm-frame bekijken. We rekenen allereerst de v_{cm} uit:

$$v_{\text{cm},x} = \frac{m_p v_{p,i,x} + m_t v_{t,i,x}}{m_p + m_t} = 4,45 \text{ m s}^{-1}$$

Nu kunnen we de eindsnelheden voor de x -richting via het cm-frame snel uitrekenen:

$$v_{p,f,x} = 2v_{\text{cm},x} - v_{p,x,i} = -1,10 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{t,f,x} = 2v_{\text{cm},x} - v_{t,x,i} = 5,43 \text{ m s}^{-1}$$

Hetzelfde kunnen we doen voor de y -richting:

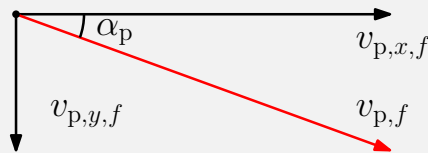
$$v_{\text{cm},y} = -1,65 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_{p,f,y} = 2v_{\text{cm},y} - v_{p,y,i} = -3,29 \text{ m s}^{-1}$$

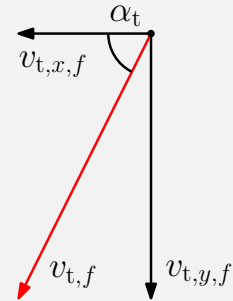
$$v_{t,f,y} = 2v_{cm,y} - v_{t,y,i} = -1,29 \text{ m s}^{-1}$$

Voor de eindsnelheid kunnen we vergelijking (2.16) gebruiken. $v_{p,f} = 5,58 \text{ m s}^{-1}$ en $v_{t,f} = 3,47 \text{ m s}^{-1}$.

Dan rest nog de vraag van de hoeken. We bekijken deze hoeken voor de poolbal en de tennisbal apart ten opzichte van de x -as. We kunnen deze hoeken achterhalen door de hoek te nemen van de eindsnelheid van een bal en de hoek met zijn x -component. Zie onderstaande figuur.



Eindsnelheid van de poolbal



Eindsnelheid van de tennisbal

De hoeken kunnen we berekenen met vergelijking (2.17). Dit oplossen geeft: $\alpha_p = 13,3^\circ$ en $\alpha_t = 71,5^\circ$.

We gaan er in dit voorbeeld vanuit dat beide ballen glijden en niet rollen. Dit komt omdat de correctie voor rotatienergie onze uitkomst sterk zou veranderen, hierover meer in hoofdstuk 8.

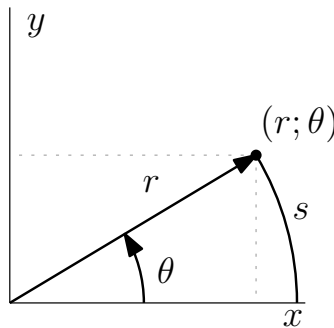
Hoofdstuk 7

Rotatiebewegingen

In hoofdstuk 2 hebben we gekeken naar de bewegingsvergelijkingen voor rechte bewegingen. In hoofdstuk 4 hebben we gekeken naar cirkelbewegingen. In dit hoofdstuk zullen we naar de bewegingsvergelijkingen van cirkelbewegingen gaan kijken.

7.1 Poolcoördinaten

Een punt in de ruimte wordt aangegeven met coördinaten. In voorgaande hoofdstukken hebben we steeds in een Cartesisch coördinatenstelsel met de loodrechte assen x -, y -, en z gewerkt. Voor rotaties zijn dit echter geen handige coördinaten. We hebben al gezien dat bij cirkelbewegingen de snelheden in de x - en y -richting constant veranderen terwijl de baansnelheid constant blijft. We zullen nu dan ook overstappen op een ander coördinatenstelsel, namelijk *poolcoördinaten*. We kijken naar het twee-dimensionale vlak. We kunnen een punt in dit vlak aangeven met een x - en y -coördinaat maar ook met een r - en θ -coördinaat waar r de straal van een cirkel is en θ de hoek die deze straal maakt, zie figuur 7.1.



Figuur 7.1: Beschrijving van een punt in Cartesische- en poolcoördinaten.

Hier kunnen we alle punten in het vlak beschrijven door een midden en een horizon te kiezen. We trekken een rechte lijn van het midden naar het punt. Deze afstand noemen we r , en het hoek die deze lijn met de horizontaal maakt noemen we θ . Merk op dat alle punten met een uniek coördinaat beschreven worden, net als in het Cartesische stelsel. Merk op dat deze coördinaten ook loodrecht op elkaar staan.

We kunnen gemakkelijk coördinaten omrekenen van pool naar Cartesisch:

$$x = r \cos(\theta) \quad (7.1)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (7.2)$$

Andersom kan ook:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7.4)$$

We nemen hiervoor θ in *radialen* in plaats van graden. De reden hiervoor is dat we, als we in radialen werken, meteen om kunnen rekenen hoeveel *boog*, s , er opgespannen wordt. In een volledige cirkel is $s = 2\pi r$, en in een kleinere cirkel is dit dus minder dan 2π , maar nog wel met straal r . Zie figuur 7.1

We kunnen de boog berekenen met de hoek als:

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (7.5)$$

Hoe je graden in radialen omrekent wordt duidelijk in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 7.1

► Hoeveel radialen in 21° ?

We weten dat er 360 graden in 2π radialen zit. We moeten dus een $\frac{21}{360}$ -ste deel van 2π hebben: $21^\circ = \frac{21 \text{ deg}}{360 \text{ deg}} 2\pi \text{ rad} = 0,37 \text{ rad}$

Voorbeeld 7.2

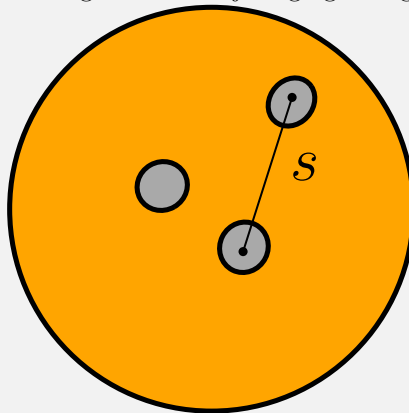
► Een emmer draait aan een touw van 1,2 m. De hoek is op een bepaald moment 2,1 rad. Hoeveel boog heeft de emmer afgelegd?

We weten uit (7.5) dat $s = r\theta$. Dit kunnen we meteen invullen en we berekenen dat $s = 2,52 \text{ m}$

Voorbeeld 7.3

Een bowlingbal met een diameter van 21,6 cm heeft drie gaten. We meten de afstand over de bowlingbal tussen het duim- en wijsvingergat, $s = 7,80 \text{ cm}$, zie onderstaande figuur.

► Wat is de hoek tussen het duimgat en het wijsvingergat in graden?



Een bowlingbal met drie gaten.

We gebruiken vergelijking (7.5) en vullen deze in: $\theta = \frac{s}{r} = \frac{7,80}{21,6 \cdot 0,5} = 0,722 \text{ rad}$. Dit

rekenen we om naar graden: $0,722 \cdot \frac{360}{2\pi} = 41,3^\circ$.

7.2 Rotatie kinematica

Nu we weten hoe we een punt in de ruimte aan kunnen geven met een r en θ -coördinaat kunnen we ook gaan kijken hoe dit punt zich door de tijd heen verplaatst.

We zullen ons beperken tot cirkelbewegingen waarin de straal r niet door de tijd heen verandert. Precies zoals we eigenlijk al in hoofdstuk 4 gezien hadden.

Alleen de hoek θ zal dus door de tijd heen veranderen.

7.2.1 Hoeksnelheid

We bekijken hoe de hoek θ door de tijd heen verandert. We doen dit weer op precies dezelfde manier als in hoofdstuk 2:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (7.6)$$

Hierin is ω de *hoeksnelheid* met eenheid radialen per seconde. Dit geeft dus aan hoeveel radialen hoek θ in één seconde verandert.

Ook hier kunnen we weer de limiet nemen en ons realiseren dat dit eigenlijk een afgeleide is:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (7.7)$$

Als we terugkijken naar vergelijking (4.1) zien we een soortgelijke vergelijking staan. We zien hier dat we de hoeksnelheid ook kunnen bepalen uit de omlooptijd T , en de hoek van een volledige cirkel 2π :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (7.8)$$

Voorbeeld 7.4

Een wasdroger draait met $1,60 \cdot 10^3$ RPM (rotaties per minuut).

► Wat is de hoeksnelheid van de wasdroger?

We gebruiken vergelijking (7.6). De wasdroger draait $\frac{1600}{2\pi}$ radialen in 60 seconde. Ofwel:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{1600 \cdot 2\pi}{60} = 168 \text{ rad s}^{-1}$$

7.2.2 Hoekversnelling

We bekijken de *verandering* van de hoeksnelheid, ofwel de hoekversnelling:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (7.9)$$

Ook hier kunnen we weer de limiet nemen:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (7.10)$$

De hoekversnelling heeft eenheid rad s^{-2} .

We zien in dat de vergelijkingen van v en ω en die van a en α heel erg veel op elkaar lijken.

Het is dan ook niet verwonderlijk dat de bewegingsvergelijkingen voor rotaties precies dezelfde vorm hebben:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (7.11)$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad (7.12)$$

Voorbeeld 7.5

Een hardeschijf (HDD) draait met $7,20 \cdot 10^3$ RPM.

► Wat is de hoeksnelheid?

We draaien 7200 RPM dat is $7200/60 = 120$ rotaties per seconde (Hz). Ofwel

$$\omega = 2\pi \cdot 120 = 754 \text{ rad s}^{-1}$$

De leeskop zit op een afstand van 6,00 cm van het midden.

► Wat is de snelheid waarmee de HDD langs de leeskop komt?

We kunnen gewoon vergelijking (7.13) invullen:

$$v = \omega r = 45,2 \text{ m s}^{-1}$$

1 bit op de schijf wordt uitgesmeerd over $0,500 \mu\text{m}$.

► Hoeveel bits kunnen er in een seconde gelezen worden?

We weten hoeveel meter er per seconde langs komt, we moeten dit delen door het aantal meter per bit:

$$\frac{45,2}{0,500 \cdot 10^{-6}} = 90,5 \cdot 10^6 \text{ bits s}^{-1}$$

1 MB bevat $8 \cdot 2^{20}$ bits.

► Hoe snel wordt 1 MB op een afstand van 6,00 cm en op 3,00 cm gelezen?

Als we $90,5 \cdot 10^6$ bits per seconde lezen lezen we $8 \cdot 2^{20}$ bits dus in:

$$\frac{8 \cdot 2^{20}}{90,5 \cdot 10^6} = 0,0927 \text{ s} \Rightarrow 10,8 \frac{\text{MB}}{\text{s}}$$

Voor een afstand van 6,00 cm. Voor de tijd voor 3,00 cm moeten we eerst ω en v opnieuw uitrekenen. Als we dit netjes doen komen we op een tijd van:

$$\frac{8 \cdot 2^{20}}{45,2 \cdot 10^6} = 0,185 \text{ s} \Rightarrow 5,39 \frac{\text{MB}}{\text{s}}$$

De fabrikanten willen dat de HDD op 6,00 en 3,00 cm even snel leest. De HDD zal op 3,00 cm dus harder moeten gaan draaien. De HDD heeft een maximum versnelling van $\alpha = 500 \text{ rad s}^{-2}$.

► Hoe lang duurt het voordat de HDD snel genoeg draait?

Er zal op dat moment moeten gelden:

$$\begin{aligned} v_{6\text{cm}} &= v_{3\text{cm}} \\ \omega_{6\text{cm}} r &= \omega_{3\text{cm}} r \\ 754 \cdot 0,0600 &= \omega_{3\text{cm}} \cdot 0,0300 \end{aligned}$$

Dit oplossen voor $\omega_{3\text{cm}}$ levert $\omega_{3\text{cm}} = 1,51 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.

Er is dus een $\Delta\omega = 754 \text{ rad s}^{-1}$.

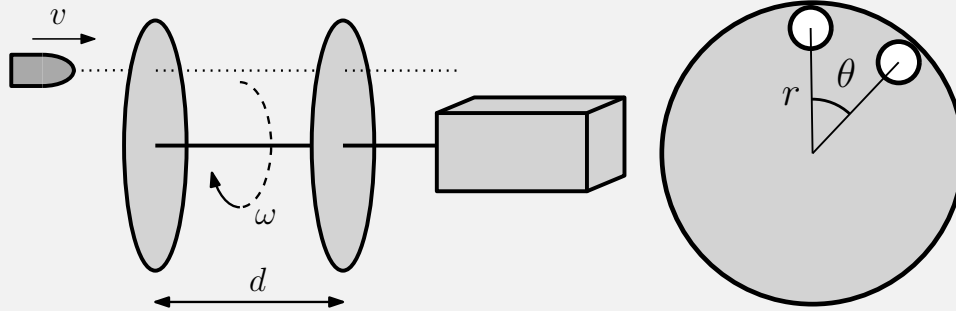
Hiermee kunnen we de tijd uitrekenen via vergelijking (7.9):

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = 1,51 \text{ s}$$

Voorbeeld 7.6

Een kogel wordt op een tweetal roterende schijven afgeschoten. De schijven draaien beiden met een hoeksnelheid $\omega = 80,0 \text{ rad s}^{-1}$ en staan op een onderlinge afstand van $d = 1,10 \text{ m}$. De kogel gaat door de twee schijven en later blijkt dat de gaten in de schijven een van $\theta = 25,2^\circ$ met elkaar maken.

► Wat was de snelheid van de kogel?



Twee simultaan draaiende schijven kunnen gebruikt worden om de snelheid van een kogel te bepalen.

De gaten in de twee schijven maken een hoek ten opzichte van elkaar.

De tijd die de kogel er over doet om tussen de platen door te gaan valt te berekenen met vergelijking (7.6). Hieruit volgt:

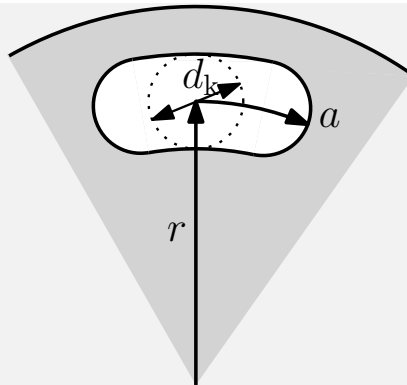
$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{25,2 \frac{2\pi}{360}}{80,0} = 5,50 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Hiermee kunnen we de snelheid van de kogel bepalen:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1,10}{5,50 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ m s}^{-1}$$

De kogel heeft een lengte van $l = 1,50 \text{ cm}$ en diameter van $d_k = 0,750 \text{ cm}$ en treft de plaat op een afstand $r = 30,0 \text{ cm}$.

► Wat is de lengte van de halve lange as, a , van de ovaal die de kogel door het schijf heen maakt?



De kogel maakt een ovaal gat in de schijven

We weten de lengte en de snelheid van de kogel, we kunnen dus berekenen hoe lang de kogel er over doet om door de schijf heen te gaan:

$$\Delta t = \frac{l}{v} = \frac{0,015}{200} = 7,50 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

In die tijd is de plaat een aantal graden gedraait, via vergelijking (7.6) komen we de hoek te weten:

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = 80,0 \cdot 7,50 \cdot 10^{-5} = 6,00 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Hiermee kunnen we via vergelijking (7.5) de afstand s bepalen die de plaat gedraait heeft:

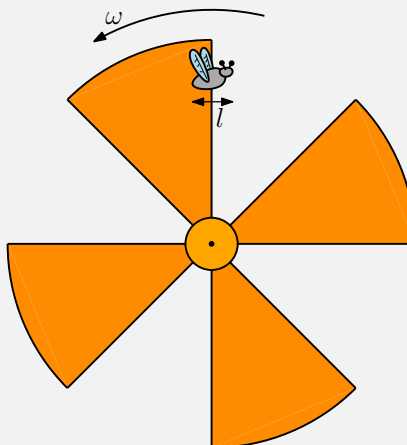
$$s = \Delta\theta r = 6,00 \cdot 10^{-3} \cdot 0,30 = 1,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Daarbij heeft de kogel ook nog een gat met een diameter van 0,750 cm gemaakt. De totale diameter van het gat is dus $0,750 + 0,180 = 0,930$ cm. Hiermee wordt de halve lange as 0,465 cm.

Voorbeeld 7.7

Een ventilator met vier bladen draait rond. Een vlieg met een breedte en lengte van $l = 1,5$ cm wil tussen de bladen door vliegen met een snelheid van $v = 0,75 \text{ m s}^{-1}$.

► Wat mag de snelste hoeksnelheid, ω , van de ventilator zijn zodat de vlieg er veilig tussendoor kan vliegen?



Een vlieg vliegt tussen de bladen van een ventilator door.

De tijd die de vlieg tussen twee bladen in vliegt is:

$$t = \frac{l}{v} = \frac{0,015}{0,75} = 0,020 \text{ s}$$

Er moet dus een opening van 0,020 s zijn. Een opening is een achtste van de cirkel. Ofwel, een achtste periode is 0,020 s. Dus $T = 0,16$ s.

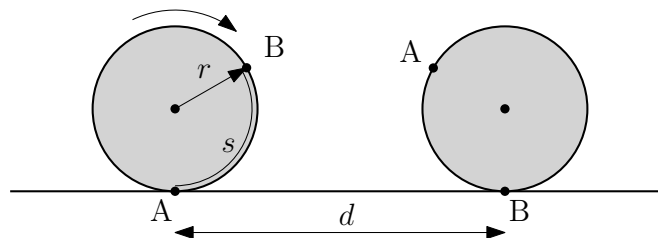
Hiermee kunnen we met vergelijking (7.8) de hoeksnelheid uitrekenen:

$$\omega = \frac{2\pi}{0,16} = 39 \text{ rad s}^{-1}$$

7.3 Omrekenen

De hiervoor afgeleide bewegingsvergelijkingen zijn handig omdat hoeken en omlooptijden makkelijker te meten zijn dan het volgen van een bepaald punt op een wiel. Toch zijn we vaker geïnteresseerd in de absolute snelheid van een wiel, de baansnelheid. We zullen nu gaan kijken hoe we deze in elkaar om kunnen rekenen.

We bekijken een rollende cilinder, zie figuur 7.2.



Figuur 7.2: Een rollend wiel onder no-slip randvoorwaarde.

Op de cilinder zijn twee punten aangegeven A en B, waarbij A het contactpunt tussen de cilinder en de grond is. We laten de cilinder een eindje rollen totdat punt B het contactpunt met de grond is geworden. We gaan er in dit proces vanuit dat de cilinder netjes afrolt en niet slipt, we noemen dit de *no-slip randvoorwaarde*.

De afstand die de cilinder op de grond heeft afgelegd noemen we d , de afstand die de cilinder zelf gedraaid heeft, de boog, noemen we s .

Omdat de cilinder niet slipt weten we vooraf al dat moet gelden:

$$d = s$$

Voor s zelf weten we:

$$s = \theta r$$

Nu delen we beide kanten door de tijd t die het geduurd heeft om de cilinder dit te laten doen:

$$\frac{d}{t} = \frac{s}{t} = \frac{\theta r}{t} = \frac{\theta}{t} r$$

Links herkennen we vergelijking (2.1), ofwel

$$v = v_b = \frac{\theta r}{t}$$

We zien dus ook in dat $v_b = v$. Dit betekent dat de snelheid van de as van de cilinder, v , even snel gaat als de baansnelheid van het oppervlak van de cilinder, v_b . Let er bij deze baansnelheid

op dat je de snelheid van het oppervlak meet *ten opzichte van de as*. Vervolgens herkennen we rechts vergelijking (7.6), ofwel:

$$v = \omega r \quad (7.13)$$

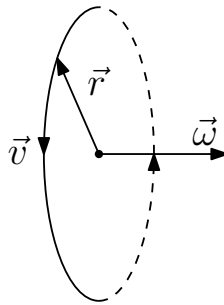
We wisten van v en r al dat het vectoren waren echter ω is ook een vector. In de paragrafen hiervoor hebben we steeds gerekend aan de waarde van ω maar zijn nooit met de richting bezig geweest.

We kunnen vergelijking (7.13) ook als vectorvergelijking opschrijven waarbij we ons realiseren dat we met een uitproduct te maken hebben:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (7.14)$$

Door de rechterhandregel toe te passen kunnen we de richting van ω achterhalen. Als we dit doen komen we er achter dat deze samen valt met de as van rotatie.

Per definitie nemen we een rotatie *tegen de klok in* als *positieve* draairichting¹. Een positieve draairichting levert dus een richting voor ω op die het papier *uit* gericht staat, zie figuur 7.3.



Figuur 7.3: Een positieve draairichting geeft een positieve richting voor ω .

We hadden vergelijking (7.13) ook nog via vergelijking (4.1) kunnen bepalen:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \\ &= \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} r \\ &= \omega r \end{aligned}$$

Het omrekenen van hoekversnelling naar versnelling gaat met behulp van vergelijking (7.13) ook makkelijk:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} r \end{aligned}$$

Ofwel:

$$a = \alpha r \quad (7.15)$$

En vectoriëel:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad (7.16)$$

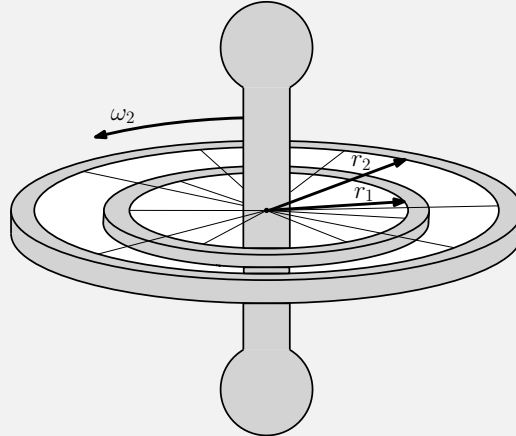
We zien dat de richting van α samen valt met de richting van ω .

¹We hadden immers ook kunnen kiezen dat $\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega}$, het scheelt alleen een min-teken

Voorbeeld 7.8

Een ruimtestation bestaat uit twee cirkelvormige compartimenten met stralen $r_1 = 40$ m en $r_2 = 55$ m. Het ruimteschip is zo gemaakt dat er in beide compartimenten normale (Aardse) valversnelling heerst.

► Persoon A staat in compartiment 1 en persoon B in compartiment B. Hoe lang duurt het voordat deze twee personen elkaar weer zien?



In een ronddraaiend ruimteschip kan artificiële zwaartekracht gegenereerd worden.

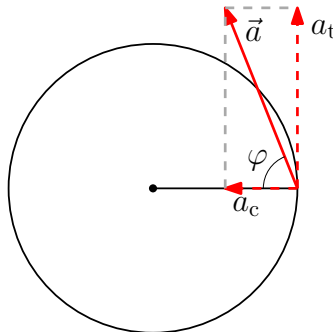
Om een normale valversnelling te creëren moet de middelpuntzoekende kracht gelijk zijn aan de zwaartekracht. We schrijven dit door vergelijking (7.13) in te vullen in de vergelijking voor de middelpuntzoekende kracht (4.6):

$$m\omega^2 r = mg \Rightarrow \omega^2 r = g$$

Ofwel voor compartiment 1 krijgen we $v_1 = 0,50 \text{ rad s}^{-1}$ en voor compartiment 2 $v_2 = 0,42 \text{ rad s}^{-1}$. Hierdoor krijgen we voor de omlooptijden via vergelijking (7.8), $T_1 = 13$ s en $T_2 = 15$ s. Compartiment een legt zijn ronde dus $T_2 - T_1 = 2,2$ s sneller af. Ofwel, hij legt een $\frac{T_2 - T_1}{T_1} = 0,17$ e ronde per keer meer af. Hij doet er dus een $\frac{1}{0,17}$ periodes over om een rondje extra te maken wat $\frac{1}{0,17} T_1 = 74$ s duurt.

7.3.1 Versneld draaien

We bekijken een versnelde draaiing, zie figuur 7.4.



Figuur 7.4: De draaiversnelling ontbonden in een centripetale en tangentiële component.

De totale versnelling \vec{a} bestaat uit twee componenten: een centripetale component a_c en een

tangentiële a_t .

Van deze twee componenten weten we het volgende:

$$a_t = \alpha r \quad (7.17)$$

$$a_c = \frac{v_b^2}{r} = \omega^2 r \quad (7.18)$$

Voor de waarde van de totale versnelling moet dus gelden:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} \\ &= r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \end{aligned} \quad (7.19)$$

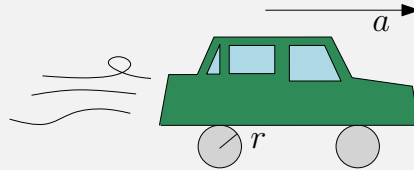
De richting van deze versnelling, φ , is te achterhalen als:

$$\tan(\varphi) = \frac{a_t}{a_c} = \frac{\alpha}{\omega^2} \quad (7.20)$$

Voorbeeld 7.9

Een auto versnelt, vanuit stilstand, gedurende 20,0 s met $0,800 \text{ m s}^{-2}$. De straal van de band van de auto is $r = 0,330 \text{ m}$, zie onderstaande figuur.

► Hoeveel hoek legt de band af?



Een versnellende auto.

We zullen vergelijking (7.11) op moeten lossen. We weten dat $\theta_0 = 0 \text{ rad}$ en dat $\omega_0 = 0 \text{ rad s}^{-1}$. Hierdoor houden we over:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Om α uit te rekenen gebruiken we vergelijking (7.15):

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{a}{r} t^2$$

Nu bedenken we ons ineens dat θ ook een richting heeft. De banden draaien met de klok mee, θ is dus negatief, ofwel α en a zijn ook negatief.

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{-0,800}{0,330} 20,0^2 = -485 \text{ rad}$$

► Hoeveel meter heeft de auto dan afgelegd?

Dit is nu eenvoudig te berekenen:

$$s = \theta r = -485 \cdot 0,330 = -160 \text{ m}$$

Voorbeeld 7.10

De centrifuge van een wasmachine heeft een straal van 30 cm. De centrifuge versnelt eenparig vanuit stilstand naar 500 RPM in 10 s.

► Wat is de tangentiële hoekversnelling?

500 RPM is gelijk aan $500 \frac{2\pi}{60} = 52 \text{ rad s}^{-1}$.

Hiermee kunnen we de tangentiële hoekversnelling uitrekenen als:

$$\omega = \alpha_t t$$

Oplossen voor α_t geeft: $\alpha_t = 5,2 \text{ rad s}^{-2}$.

► Wat is de totale versnelling na 2,0 s?

We gebruiken hiervoor vergelijking (7.19). Om dit te kunnen zullen we eerst de hoeksnelheid na 2,0 s moeten uitrekenen:

$$\omega = \alpha_t t = 5,2 \cdot 2,0 = 10 \text{ rad s}^{-1}$$

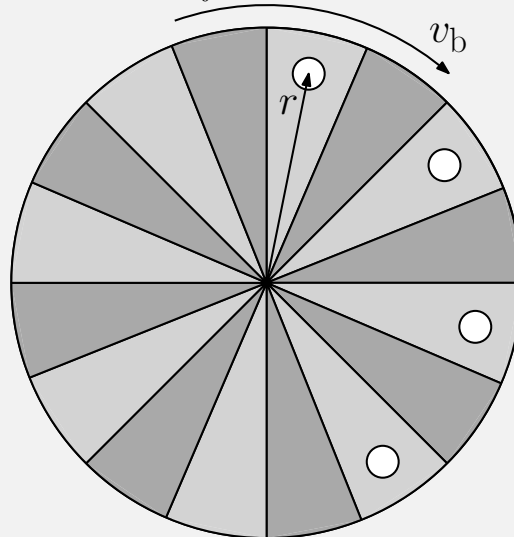
Hiermee kunnen we vergelijking (7.19) invullen:

$$a = 0,30 \sqrt{5,2^2 + 10^4} = 33 \text{ m s}^{-2}$$

Voorbeeld 7.11

Met een camera welke 24 beeldjes per seconde neemt wordt een opname gemaakt van een balletje wat op een draaiend rad ligt. De beeldjes zijn over elkaar geplakt in onderstaand figuur. De straal van de cirkel die het balletje maakt is $r = 15 \text{ cm}$.

► Wat is de baansnelheid van het balletje?



De beeldjes van een 24 fps camera over elkaar heen geplakt.

We zien op de figuur 4 balletjes. Tussen ieder beeldje zit $\frac{1}{24}$ -ste seconde. Er is dus in totaal $\Delta t = \frac{3}{24} = 0,125$ seconde verstreken tussen het eerste en het vierde beeldje.

Om de afstand die het balletje in die tijd aflegt te bepalen moeten we kijken hoeveel hoek het balletje heeft afgelegd. Op het rad zitten 16 vakjes waarvan het balletje er 6 heeft afgelegd. De afstand is dus $\frac{6}{16}$ -de van de totale omtrek, $\Delta s = \frac{6}{16} \cdot 2\pi r = 0,353 \text{ m}$.

Nu kunnen we de baansnelheid uitrekenen:

$$v_b = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2,8 \text{ m s}^{-1}$$

► Wat is de omlooptijd van het rad?

In 0,125 seconde heeft het rad $\frac{6}{16}$ -de van de cirkel afgelegd. De omlooptijd is dus $T = 0,125 \cdot \frac{16}{6} = 0,33 \text{ s}$.

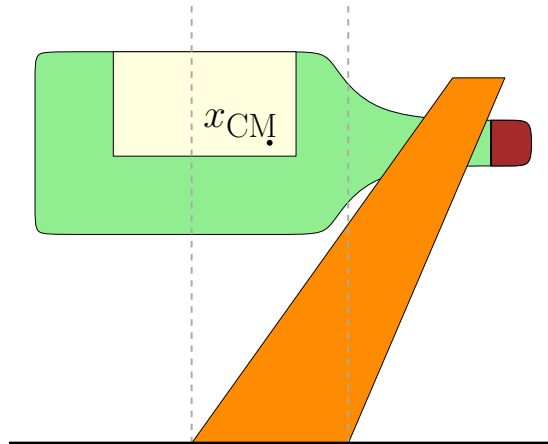
Hoofdstuk 8

Rotatie dynamica

Als je een bezemsteel bij het uiteinde vast houdt zul je veel kracht moeten zetten om deze te balanceren. Als je dezelfde bezemsteel in het midden vast pakt moet je veel minder kracht zetten. Dit terwijl de massa van de bezemsteel niet veranderd is, de zwaartekracht erop is gelijk. De reden dat het meer kracht kost om de bezemsteel bij het uiteinde vast te houden heeft ermee te maken dat de bezemsteel in die situatie wil gaan draaien. De natuurkunde hier achter wordt in dit hoofdstuk behandeld.

8.1 Moment

De wijnfles van figuur 8.1 blijft netjes staan. Dit is met deze speciale wijnfleshouder mogelijk omdat het zwaartepunt van de wijnfles, x_{CM} zich boven het *steunvlak* bevindt.



Figuur 8.1: Zolang het zwaartepunt zich boven het steunvlak bevindt blijft deze fles netjes staan.

Het steunvlak van een voorwerp, in dit geval het systeem van fles en houder, bevindt zich altijd tussen de buitenste twee punten waarmee het voorwerp contact heeft met de grond. In de figuur aangegeven met de twee gestippelde grijze lijnen.

Omdat het zwaartepunt hier netjes tussenin ligt blijft de fles staan.

In de situatie waarbij het zwaartepunt naast het steunvlak ligt zal het voorwerp de neiging krijgen om te gaan kantelen en draaien. Hoe verder het zwaartepunt buiten het steunvlak ligt of hoe sterker de zwaartekracht en hoe meer neiging het voorwerp zal krijgen om te gaan draaien.

Deze neiging om te gaan draaien wordt in de natuurkunde *moment* genoemd, in het Engels *torque*.

De vergelijking voor het moment is:

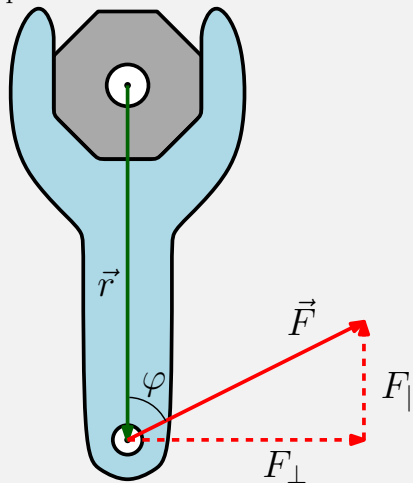
$$\tau = Fr \sin(\alpha) \quad (8.1)$$

Hierin is τ het moment, F de kracht die op het zwaartepunt werkt en r de arm van draaipunt tot het punt waar de kracht aangrijpt en α de hoek tussen \vec{F} en \vec{r} . Om draaiing te krijgen moeten de kracht en de arm moeten dus loodrecht op elkaar staan (zie ook voorbeeld 8.1).

Voorbeeld 8.1

We bekijken een moersleutel met lengte $r = 25$ cm, we zullen hier, onder een hoek $\varphi = 40^\circ$ een kracht op uit oefenen van $F = 3,7 \cdot 10^2$ N.

► Wat is het moment dat op de moer staat?



De kracht op de moersleutel ontbonden in een parallelle en loodrechte component.

Om het moment uit te rekenen moeten de kracht F en de arm r loodrecht op elkaar staan. We ontbinden de kracht in een parallelle en loodrechte component. We hebben voor de rest van de berekening alleen de loodrechte component nodig, de parallelle “duwt” als het ware alleen de moer krom.

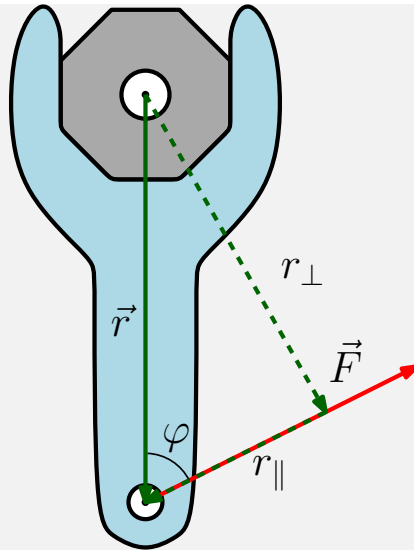
De loodrechte component is

$$F_{\perp} = F \cos(90^\circ - \varphi) = F \sin(\varphi) = 2,4 \cdot 10^2 \text{ N}$$

Hiermee kunnen we het moment τ uitrekenen:

$$\tau = F_{\perp} r = F \sin(\varphi) r = 60 \text{ Nm}$$

In de vorige oplossing is de kracht ontbonden, we hadden echter ook de arm kunnen ontbinden:



De arm van de moersleutel ontbonden in een parallelle en loodrechte component. In dat geval hadden we voor de arm gekregen:

$$r_{\perp} = r \sin(\varphi) = 16 \text{ cm}$$

Waarmee het moment uit te rekenen is als:

$$\tau = Fr_{\perp} = Fr \sin(\varphi) = 60 \text{ Nm}$$

Precies het zelfde als hiervoor.

De eenheid voor moment is newton meter. Dit is qua basiseenheden dezelfde eenheid als die van arbeid. Toch is moment iets wezenlijk anders dan arbeid. Het gaat om draaiing. Bovendien was het bij arbeid zo dat F en s parallel moesten staan terwijl bij moment F en r juist loodrecht op elkaar moeten staan.

Behalve dat is er nog een verschil, moment is een vector. Als we vergelijking (8.1) als vectorvergelijking opschrijven krijgen we:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (8.2)$$

Omdat we hier met een uitproduct te maken hebben is het ook meteen duidelijk dat F en r loodrecht op elkaar moeten staan. De parallelle component zorgt immers niet voor draaiing en levert in een uitproduct 0 op.

De richting van τ is net als die van de hoeksnelheid, voor de moer als in voorbeeld 8.1 is dit het papier uit gericht.

8.2 Evenwicht

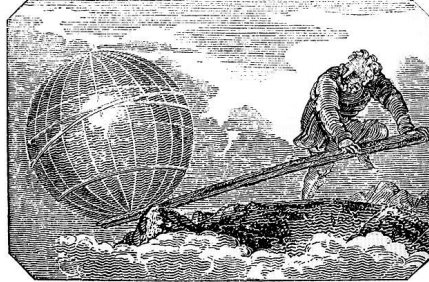
De Eerste wet van Newton vertelde ons dat een voorwerp waarop geen netto kracht werkt in rust is of met constante snelheid beweegt. Moment heeft een soortgelijke wet.

Een voorwerp wat niet draait heeft evenveel moment linksom als rechtsom. Of in formulevorm, een voorwerp draait niet als geldt:

$$\sum \tau_{\text{linksom}} = \sum \tau_{\text{rechtsom}} \quad (8.3)$$

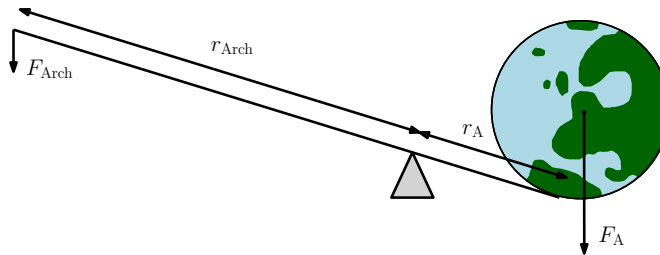
8.2.1 Hefbomen

Archimedes deed rond 250 v.Chr. toen hij over hefbomen sprak al de beroemde uitspraak “Geef mij een plek om te staan en ik beweeg de Aarde”. Hij had hierin gelijk.



Figuur 8.2: Een prent uit het *Mechanics Magazine*, London 1824 bron: <http://en.wikipedia.org/wiki/Lever>.

Archimedes had destijds al door dat met behulp van hefbomen en momenten met weinig kracht veel kracht gezet kan worden. We bekijken hoe we de aarde op zouden kunnen tillen.



Figuur 8.3: Als de hefboom lang genoeg is kun je zelfs de Aarde optillen.

De Aarde heeft een massa van $6,0 \cdot 10^{24}$ kg, laten we aannemen dat de arm van de Aarde de straal van de Aarde is $r_A = 6,4 \cdot 10^6$ m. Laten we aannemen dat Archimedes een kracht kon zetten van 800 N.

Als we de momentenwet voor evenwicht (8.3) invullen krijgen we $r_{Arch} = 4,7 \cdot 10^{29}$ m (in perspectief, $9,46 \cdot 10^{15}$ m = 1 lichtjaar en het observabele universum is $45,7 \cdot 10^9$ lichtjaar in straal). Dit is natuurlijk absurd lang, maar het kán theoretisch wel.

Dit alles mag energiebehoud natuurlijk niet schenden.

Om de Aarde op deze manier 1,0 m op te tillen moet volgens vergelijking (5.12) $5,9 \cdot 10^{25}$ J arbeid verricht worden. Wij moeten dus ook zoveel arbeid verrichten. We gebruiken vergelijking (5.2) en vullen voor de kracht 800 N in, we zien nu dat wij de hefboom over een afstand van $s = 7,4 \cdot 10^{22}$ m moeten verplaatsen.

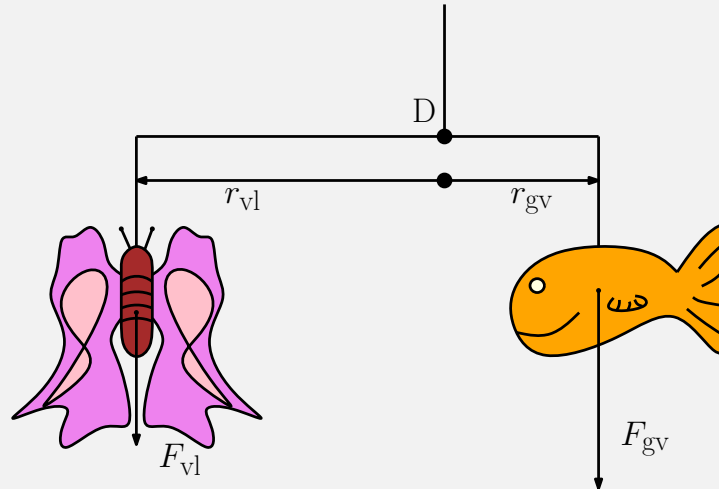
Bij hefbomen geldt de zogenaamde *hefboom regel*: een halvering van benodigde kracht betekent een verdubbeling van de hefboom en een verdubbeling van verplaatsing.

We zullen deze regel nogmaals tegen komen in paragraaf 8.2.2.

Voorbeeld 8.2

Een mobiel voor in de kinderkamer heeft een vlinder van massa $m_{vl} = 300$ g en een goudvis van massa $m_{gv} = 500$ g. De goudvis hangt op een afstand $r_{gv} = 10,0$ cm.

► Op welke afstand moet de vlinder gehangen worden zodat ze netjes horizontaal blijven hangen?



Een kindermobiel hangt altijd netjes horizontaal. D geeft het draaipunt aan.

Om dit op te lossen moeten we vergelijking (8.3) en (8.1) gebruiken. Allereerst berekenen we de krachten F_{vl} en F_{gv} :

$$F_{vl} = m_{vl}g = 2,94 \text{ N}$$

$$F_{gv} = m_{gv}g = 4,91 \text{ N}$$

Waarna we vergelijking (8.1) in (8.3) in kunnen vullen:

$$F_{vl}r_{vl} = F_{gv}r_{gv}$$

$$2,94r_{vl} = 1,44$$

Dit oplossen voor r_{vl} geeft $r_{vl} = 0,167 \text{ m}$.

► Wat is de spankracht in het touw waar punt D vastgemaakt is?

Hiervoor maken we gebruik van het feit dat de hele mobiel niet versnelt. De netto kracht in de y -richting is dus nul:

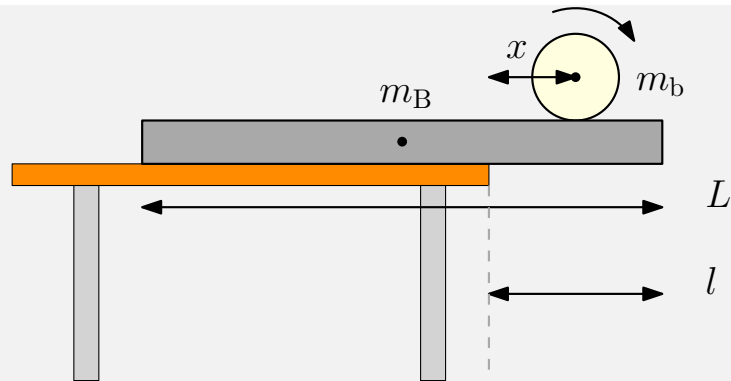
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ &= F_{vl} + F_{gv} + F_s = 2,94 + 4,91 + F_s \end{aligned}$$

Oplossen voor de spankracht geeft: $F_s = -7,85 \text{ N}$.

Voorbeeld 8.3

Een bal met een massa van $m_b = 0,80 \text{ kg}$ rolt over een balk van massa $m_B = 2,5 \text{ kg}$. De balk heeft lengte $L = 2,0 \text{ m}$ en steekt een lengte $l = 80 \text{ cm}$ uit boven de tafel.

► Op welke afstand x van de bal begint de balk te kantelen?



Als de bal te ver komt begint de balk te kantelen.

We bedenken ons eerst hoe de situatie er uit zou zien als de balk gaat kantelen. De balk zal dan draaien rond de hoek van de tafel.

Dat de balk nog niet draait komt omdat het zwaartepunt van de balk nog boven het steunvlak ligt. Het zwaartepunt van de balk ligt precies in het midden, op een afstand van $\frac{1}{2}L - l = 20$ cm van het draaipunt.

De zwaartekracht van de balk zorgt dus voor een moment linksom (tegen de klok in) terwijl de bal een moment rechtsom zal veroorzaken.

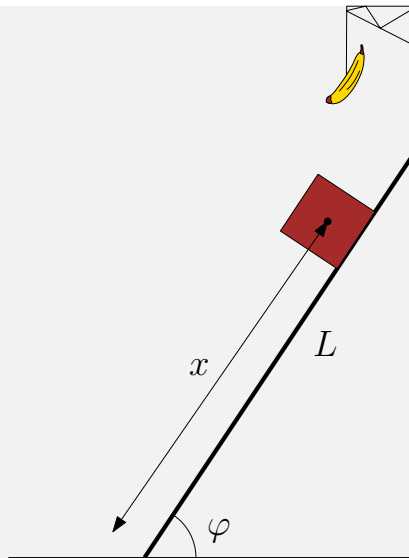
We kunnen dus wederom vergelijking (8.3) invullen:

$$\begin{aligned} F_B r_B &= F_b r_b \\ m_B g r_B &= m_b g x \\ 2,5 g 0,20 &= 0,50 g x \end{aligned} \tag{8.4}$$

Oplossen voor x levert $x = 0,63$ cm.

Voorbeeld 8.4

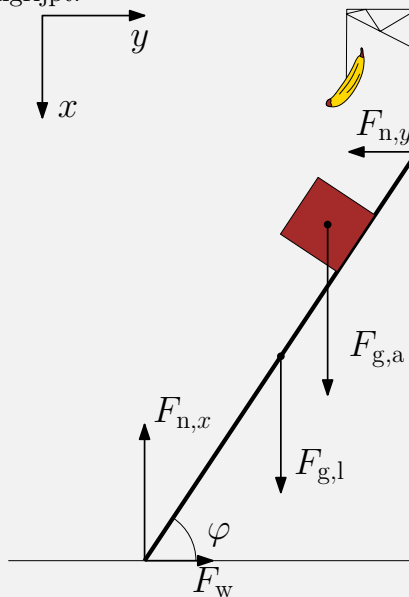
Bij wijze van experiment hebben een aantal biologen een banaan opgehangen. Ze willen kijken of de apen slim genoeg zijn om hier bij te komen. Hiervoor geven ze de aap met een massa van $m_a = 80,0$ kg een ladder met een lengte $L = 6,00$ m en massa $m_l = 10,0$ kg. De ladder staat onder een hoek van $\varphi = 50,0^\circ$ tegen een muur die extreem glibberig is. De aap moest uiteindelijk $x = 4,50$ m tegen de ladder op lopen voordat hij bij de banaan kon.



De aap zal de ladder op moeten voor de banaan.

► Bereken de wrijvingskracht F_w op de grond, de normaalkracht op de grond $F_{n,y}$ en de normaalkracht van de muur $F_{n,x}$ op het moment dat de aap bij de banaan was.

We zullen ons eerst moeten bedenken welke krachten waar zitten en of deze krachten tot momenten leiden. We maken opnieuw een schets van de situatie maar nu niet als free body diagram, maar we tekenen de krachten die op de ladder werken op de plaats waar de kracht daadwerkelijk aangrijpt.



De krachten die spelen. Omdat de muur extreem glibberig is is er geen wrijvingskracht. Omdat we uiteindelijk drie grootheden uit moeten rekenen zullen we op zoek moeten naar drie onafhankelijke vergelijkingen.

We realiseren ons dat de situatie volkomen stabiel is, er zijn geen versnellingen én geen draaiingen. We kunnen dus een krachtenbalans in de x - en y -richting opstellen én een

balans voor rotaties:

$$\sum F_x = 0 \quad (8.5)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (8.6)$$

$$\sum \tau = 0 \quad (8.7)$$

Uit (8.5) halen we:

$$\sum F_x = F_w - F_{n,y} = 0 \Rightarrow F_w = F_{n,y} \quad (8.8)$$

Uit (8.6) halen we:

$$\sum F_y = F_{g,l} + F_{g,a} - F_{n,x} = 0 \Rightarrow F_{g,l} + F_{g,a} = F_{n,x} \quad (8.9)$$

Uit (8.9) kunnen we meteen $F_{n,x}$ oplossen: $F_{n,x} = 882 \text{ N}$.

Voordat we (8.7) oplossen moeten we ons eerst bedenken waar het draaipunt zit. Als de ladder begint te draaien zal deze niet om zijn zwaartepunt draaien maar om het steunpunt, daar waar de ladder de grond raakt. Hiermee zien we meteen dat de krachten $F_{n,x}$ en F_w geen momenten leveren omdat hun armen 0 zijn. We houden dus over:

$$\begin{aligned} \sum \tau_l &= \sum \tau_r \\ F_{n,y} r_{n,y} &= F_{g,l} r_{g,l} + F_{g,a} r_{g,a} \\ m_{n,y} g r_{n,y} &= m_{g,l} g r_{g,l} + m_{g,a} g r_{g,a} \\ F_{n,y} L \sin(\varphi) &= m_{g,l} g \frac{1}{2} L \cos(\varphi) + m_{g,a} g x \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (8.10)$$

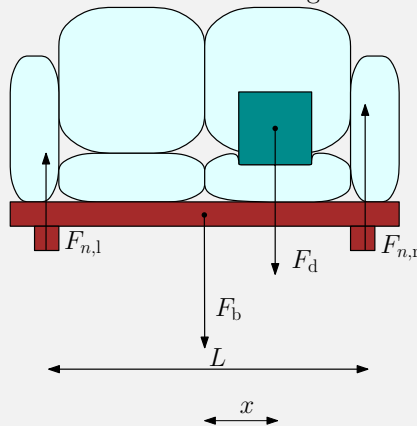
Uit (8.10) kunnen we $F_{n,y}$ oplossen, $F_{n,y} = 535 \text{ N}$.

Dit wetende kunnen we uit (8.8) de laatste variabele, F_w , berekenen: $F_w = 535 \text{ N}$

Voorbeeld 8.5

Een doos met gewicht $F_d = 100 \text{ N}$ staat op afstand $x = 30,0 \text{ cm}$ op een bankstel met gewicht $F_b = 500 \text{ N}$. De poten van de bank staan op een afstand van $L = 2,50 \text{ m}$.

► Bereken de normaalkrachten links en rechts die de grond moet uitoefenen.



Een doos staat op de rechter zijde van een bankstel.

Bij een symmetrische massaverdeling zouden de normaalkrachten links en rechts even

groot zijn. Omdat de deus er nu op staat gaat dit niet op, de rechter normaalkracht zal groter zijn. De reden hiervoor is dat de bank anders zou kantelen. De deus geeft immers een moment met de klok mee aan de bank, de normaalkracht moet dit opheffen.

We moeten twee grootheden berekenen, dit betekent dat we ook twee onafhankelijke vergelijkingen moeten hebben om dit op te lossen. Naast de momentenwet moeten we ook een krachtenbalans opstellen.

Onze vergelijkingen worden:

$$\sum F_y = 0 \quad (8.11)$$

$$\sum \tau = 0 \quad (8.12)$$

Invullen van (8.11) levert:

$$F_{n,l} + F_{n,r} - F_b - F_d = 0 \Rightarrow F_{n,l} + F_{n,r} = F_b + F_d$$

Waaruit we, na het invullen van F_b en F_d , halen:

$$F_{n,r} = 600 - F_{n,l} \quad (8.13)$$

Invullen van (8.12) levert:

$$F_{n,r} \frac{1}{2}L - F_{n,l} \frac{1}{2}L - F_d x = 0 \Rightarrow F_{n,l} \frac{1}{2}L + F_d x = F_{n,r} \frac{1}{2}L$$

Hier kunnen we (8.13) voor $F_{n,r}$ substitueren:

$$F_{n,l} \frac{1}{2}L + F_d x = (600 - F_{n,l}) \frac{1}{2}L \quad (8.14)$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen voor $F_{n,l}$, $F_{n,l} = 288$ N.

Hieruit kunnen we via (8.13) $F_{n,r}$ oplossen: $F_{n,r} = 312$ N.

In voorgaande berekening zijn we er vanuit gegaan dat de bank zou draaien om zijn zwaartepunt. We hadden er ook vanuit kunnen gaan dat de bank om zijn linker poot zou draaien. Vergelijking 8.12 zou er dan als volgt uit zien:

$$F_{n,r} L - F_d \left(\frac{1}{2}L + x\right) - F_b \frac{1}{2}L = 0 \Rightarrow F_{n,r} L = F_d \left(\frac{1}{2}L + x\right) + F_b \frac{1}{2}L$$

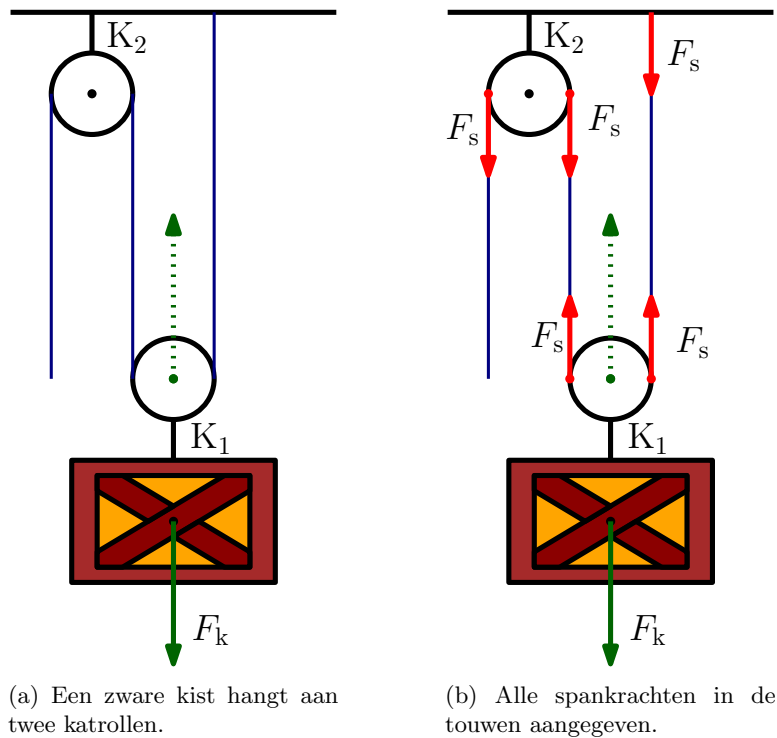
Waaruit te berekenen is dat $F_{n,r} = 312$ N. Precies het zelfde als wat uit (8.14) volgde.

Het maakt dus niet zoveel uit waar het draaipunt gekozen wordt, als er maar consequent met de momenten omgegaan wordt. In het laatste geval bleek het zelfs handiger te zijn om het draaipunt bij een van de poten te kiezen omdat er in dat geval geen vergelijkingen in elkaar ingevuld hoefden te worden.

We hadden in hoofdstuk 7 al gezien dat θ een soortgelijke rol vervulde als x , ω als v en α als a . Uit de vorige paragraaf zien we dat het moment, τ , bij cirkelbewegingen een soortgelijke rol vervult als kracht, F , dat deed bij rechte bewegingen.

8.2.2 Katrollen

Net als met hefboomen is het ook met katrollen mogelijk om met minder kracht veel kracht te zetten. In deze paragraaf zullen we werken met *ideale katrollen*. Ideaal wil zeggen dat de katrollen massaloos zijn en wrijvingsloos kunnen draaien.



Figuur 8.4: Uitwerking van alle krachten bij katrollen.

We bekijken figuur 8.4a. Hier hebben we een kist met behulp van een touw aan twee *ideale katrollen* gehangen. Laten we aannemen dat de kist een gewicht $F_k = 1,40$ kN heeft.

We weten dat de kist stil hangt dus op de katrol zal een netto kracht van 1,40 kN omhoog moeten werken (groen gestippelde pijl). Deze kracht wordt geleverd door de kracht in het touw. We noemen deze kracht de *spankracht*.

Bij ideale katrollen is de spankracht *altijd* overal gelijk in een touw. Omdat er twee touwen aan katrol 1 (K_1) hangen hoeft er per touw dus maar 700 N geleverd te worden, zie figuur 8.4b. Het rechter touw gaat naar het plafond, het plafond zal daar dus ook 700 N moeten leveren om het touw vast te houden.

Het linker touw gaat naar K_2 . Omdat de spankracht in het touw overal gelijk is en omdat de katrol ideaal is, is er in het touw bij K_2 links en rechts een kracht van 700 N naar beneden. Wederom zal het plafond 1,40 kN moeten leveren om de katrol aan het plafond vast te houden. Maar om de kist op te tillen zal maar een kracht van 700 N nodig zijn. Dit is immers de spankracht die het linker touw van katrol K_2 heeft.

We maken een onderscheid in *vaste-* en *losse* katrollen. Katrol K_1 is een losse katrol en verlicht de hoeveelheid kracht die gezet moet worden. Katrol K_2 is een vaste katrol en verandert alleen de richting van de spankracht en het touw.

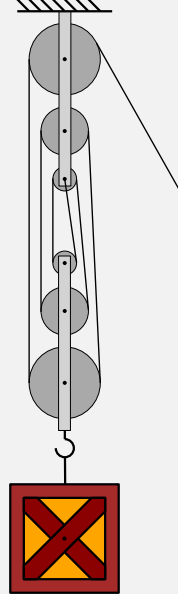
Net als bij hefboomen geldt voor katrollen op precies dezelfde manier ook de wet van behoud van energie.

Om de kist 1,00 m op te tillen moet er in dit geval 2,00 m touw binnen gehaald worden.

Voorbeeld 8.6

Een kist van 600 N hangt aan een ideaal katrollen systeem zoals in onderstaande figuur.

- Hoeveel kracht moet er gezet worden om de kist op te tillen?



Een kist wordt met een set katrollen opgetild.

Er zijn onderaan drie vrije katrollen. Hieraan zitten zes kabels welke het gewicht verdelen. Er moet dus 100 N kracht gezet worden.

- Hoeveel touw moet er binnengehaald worden om de kist 1,00 m op te tillen?
De arbeid moet het zelfde zijn. We zetten zes keer minder kracht dus de weg wordt zes keer zo lang. We zien via vergelijking (5.2) dat we dus 6,00 m touw binnen moeten halen.

Een andere manier om naar katrollen te kijken is via momenten. In figuur 8.5 zien we een massa m aan de losse katrol K_1 hangen. We gaan er vanuit dat de massa net stil blijft hangen.

Als de massa gaat bewegen zal de katrol gaan draaien. Hij draait dan eigenlijk via punt D langs het touw. Punt D is dus het draaipunt van de beweging.

Omdat alles in evenwicht is moet het moment linksom (die de massa naar beneden wil laten vallen) en het moment rechtsom (die de katrol omhoog trekt) in evenwicht zijn.

$$\begin{aligned}\tau_l &= \tau_r \\ mg R &= F_s 2R\end{aligned}$$

Het moment rechtsom heeft een twee keer zo grote arm, de katrol is immers rond. Hierdoor is dus meteen te zien dat de benodigde spankracht voor het moment rechtsom de helft van het gewicht van de massa is.

8.3 Traagheidsmoment

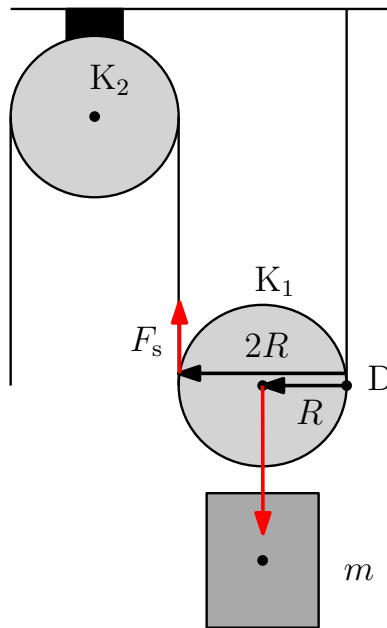
We kijken nogmaals naar een versnelde draaiing. We bekijken een kogelslingeraar die zijn kogel steeds sneller in het horizontale vlak laat draaien, zie figuur 8.6.

We zien dat de kracht \vec{F} waardoor de kogel steeds sneller rond gaat draaien loodrecht op de arm \vec{r} staat. Er werkt dus een moment op de kogel.

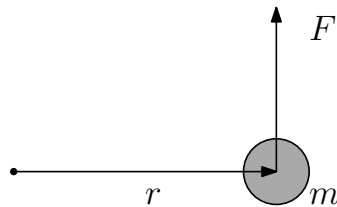
Voor het gemak is in de figuur de middelpuntzoekende kracht weggelaten, dit omdat deze geen moment levert, de aanwezige F_{mpz} staat namelijk parallel aan de arm.

Het moment dat de voorwaartse kracht levert is:

$$\tau = Fr$$



Figuur 8.5: Een katrol draait langs het touw op waardoor er een moment ontstaat.



Figuur 8.6: Een kogelslingeraar draait zijn kogel steeds sneller rond. De middelpuntzoekende kracht is in deze schematische weergave weggelaten.

Als we hier de Tweede wet van Newton invullen krijgen we:

$$\tau = mar$$

Waarna we voor de tangentiële versnelling (7.15) in kunnen vullen, we krijgen dan:

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

We zien hier, qua vorm, een soortgelijke vergelijking staan als de Tweede wet van Newton, $F = ma$. Moment vervult de plaats van de kracht en de hoekversnelling die van de versnelling. De term mr^2 vervult dus een soort van massa of traagheidsterm, dat gene wat zich verzet tegen draaiing. We noemen deze term het *traagheidsmoment* en geven deze het symbool I .

Traagheidsmomenten mogen, net als massa's, bij elkaar opgeteld worden. Meerdere slingers kunnen immers bijdragen aan het totale (traagheids)moment (zie voorbeelden 8.7 en 8.8)

We krijgen dus voor het moment:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (8.15)$$

Het traagheidsmoment heeft, net als massa, geen richting. Als we vergelijking (8.15) dus vectorieel opschrijven krijgen we:

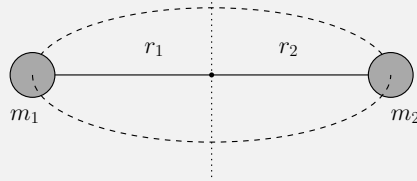
$$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad (8.16)$$

Het traagheidsmoment, I , is voor iedere massasamenstelling anders. In het voorgaande voorbeeld van de kogelslinger was het traagheidsmoment gelijk aan $I = mr^2$.

Voorbeeld 8.7

We bekijken een slinger bestaande uit massa m_1 op afstand r_1 van het draaipunt en massa m_2 op afstand r_2 van het draaipunt die met de zelfde versnelling gaan ronddraaien.

► Wat is de totale traagheid van het systeem?



Een dubbele slinger.

We bekijken de som van de momenten $\sum \tau$ en realiseren ons dat we traagheden bij elkaar op mogen tellen:

$$\begin{aligned}\sum \tau &= \tau_1 + \tau_2 \\ &= m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \alpha \\ &= I \alpha\end{aligned}$$

Ofwel: $I = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$.

In het geval dat $r_1 = r_2 = r$ geldt: $I = (m_1 + m_2)r^2$, precies het zelfde als wanneer we één slinger met dubbele massa zouden hebben

Zodra er meerdere massa's rond draaien kunnen we de traagheidsmomenten dus bij elkaar optellen:

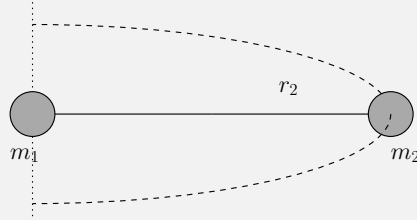
$$I = \sum mr^2 \quad (8.17)$$

We bekijken dezelfde slinger maar nu rond een andere draaias.

Voorbeeld 8.8

We bekijken een slinger bestaande uit massa m_1 in het draaipunt en massa m_2 op afstand r_2 van het draaipunt. Massa 2 gaat versneld ronddraaien.

► Wat is de totale traagheidsmoment van het systeem?



Een extra lange slinger met massa in het midden.

We bekijken de som van de momenten $\sum \tau$ en realiseren ons dat we traagheidsmomenten bij elkaar op mogen tellen:

$$\begin{aligned}
 \sum \tau &= I\alpha \\
 &= \left(\sum mr^2 \right) \alpha \\
 &= \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \right) \alpha \\
 &= m_2 r_2^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Ofwel: $I = m_2 r_2^2$.

De eerste massa, m_1 , komt dus helemaal niet meer voor omdat deze geen arm r_1 , heeft.

Voorgaande twee voorbeelden waren eenvoudige voorbeelden. Lastiger wordt het als er geen losse massa's maar een homogene massaverdeling bekeken wordt (zoals een staaf of een ring). Hiervoor moet eigenlijk een integraal uitgerekend worden. Voor de liefhebber is hieronder een relatief eenvoudig voorbeeld opgenomen.

Intermezzo

We beginnen met vergelijking (8.17) en realiseren ons dat de naar kleine bijdragen Δm aan het kijken zijn die zich op afstand r bevinden. Al deze bijdragen dm leveren een kleinde bijdrage aan het traagheidsmoment, ΔI :

$$\Delta I = \sum \Delta m r^2$$

We maken onze bijdragen Δm nu infinitesimaal klein tot dm , en schrijven dit om tot een integraal:

$$\int dI = \int_M r^2 dm$$

De linker kant van de integraal wordt ons totale traagheidsmoment. De rechterkant herschrijven we met behulp van $m = \rho V$:

$$I = \int_V \rho r^2 dV$$

Waarbij ρ de massadichtheid is, r de afstand van een volumestukje dV tot het draaipunt. Voor de massaconfiguratie van voorbeeld 8.8 reduceert vorige vergelijking tot:

$$I = \int_{V_1} \rho_1 r_1^2 dV + \int_{V_2} \rho_2 r_2^2 dV = \int_{V_2} \rho_2 r_2^2 dV$$

Dit omdat arm $r_1 = 0$.

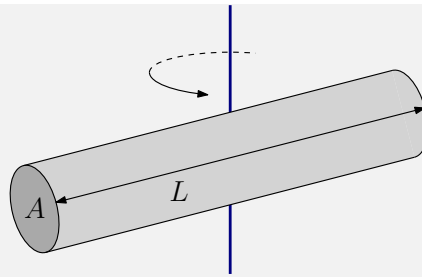
Vervolgens mogen we r_2 buiten de integraal halen. We hebben immers met een puntmassa te maken (ondanks dat er een bolletje getekend is gaan we er vanuit dat alle massa zich in één punt bevindt):

$$I = r_2^2 \int_{V_2} \rho_2 dV$$

Waarna we alleen maar de dichtheid over het volume integreren wat de massa levert.

$$I = r_2^2 m_2$$

We kunnen ook moeilijkere massa configuraties doorrekenen. Laten we kijken naar een staaf van lengte L met oppervlak A die roteert rond zijn zwaartepunt. Zie de figuur hieronder.



Een ronddraaiende staaf.

We stellen wederom de integraal op:

$$I = \int \rho r^2 dV$$

We kunnen dV opsplitsen in $da dr$, waarbij da integreert over het oppervlak en dr over de lengte.

$$I = \int_A \int_L \rho r^2 da dr$$

De dichtheid ρ is door de staaf gelijk dus we mogen de integraal van da naar buiten halen en uitintegreren:

$$I = \int_A da \int_L \rho r^2 dr = A \int_L \rho r^2 dr$$

De integratiegrenzen voor dr moeten van $-\frac{1}{2}L$ tot $\frac{1}{2}L$ lopen. In het midden moet r immers 0 zijn omdat er daar geen arm is:

$$I = A \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \rho r^2 dr$$

We zien een symmetrie in de figuur, in plaats van de hele integraal kunnen we ook twee keer de halve integraal berekenen waarbij we dr van 0 tot $\frac{1}{2}L$ laten lopen:

$$I = 2A \int_0^{\frac{1}{2}L} \rho r^2 dr$$

Deze integraal kunnen we uitrekenen:

$$I = 2A \left[\rho \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\frac{1}{2}L} = \frac{2}{3} A \rho \left(\frac{1}{2}L \right)^3 = \frac{2}{3} A \rho \frac{1}{8} L^3$$

En als we alle getallen bij elkaar nemen en inzien dat $\rho AL = m$ krijgen we:

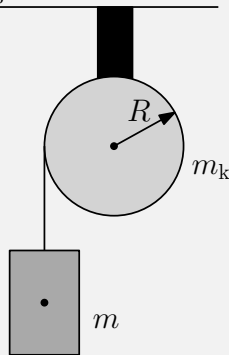
$$I = \frac{1}{12} mL^2$$

Het uitrekenen van alle traagheidsmomenten is een heel werk. In figuur 8.7 zijn de meest voorkomende configuraties weergegeven. De blauwe dikke lijn geeft de as aan waar het voorwerp omheen draait.

Voorbeeld 8.9

Een blokje met een massa van $m_b = 100$ g hangt met een touw, dat op de katrol gerold zit, aan een katrol met massa $m_k = 2,00$ kg en een straal $R = 5,00$ cm.

► Wat is de versnelling van het blokje?



Een blokje hangt aan een niet massaloz katrol en valt naar beneden.

We beginnen met vergelijking (8.15):

$$\sum \tau = I\alpha$$

Het traagheidsmoment van de katrol is:

$$I = \frac{1}{2}m_k R^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Het enige moment, τ , is de spankracht waarmee de massa aan de katrol trekt:

$$\sum \tau = F_s R = m_b(g - a)R$$

Via de Tweede Wet van Newton kunnen we de spankracht uitrekenen als:

$$F_s = F_z - F_{\text{net}} = m_b(g - a)$$

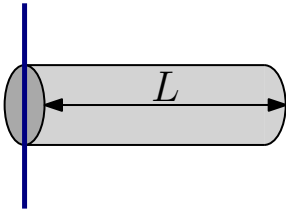
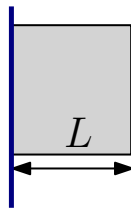
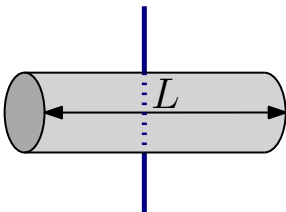
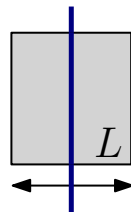
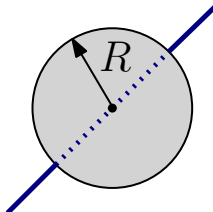
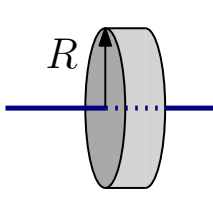
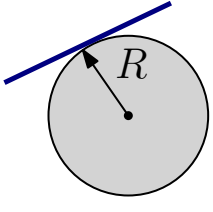
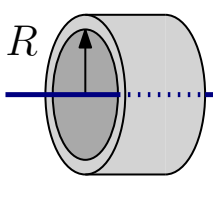
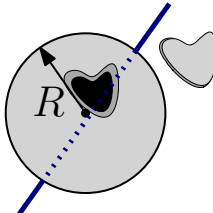
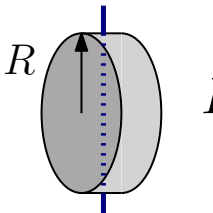
Vanaf hier kunnen we de eerste vergelijking invullen:

$$m_b(g - a)R = \frac{1}{2}m_k R^2 \alpha = \frac{1}{2}m_k R^2 \frac{a}{r}$$

In de laatste stap schrijven de α om naar a met behulp van vergelijking (7.15), dit is dezelfde a als de versnelling van de katrol omdat het touw er zonder te slippen af rolt.

Deze vergelijking kunnen we oplossen voor a waaruit volgt dat

$$a = \frac{m_b g R}{\frac{1}{2}m_k R + m_b R} = \frac{m_b g}{\frac{1}{2}m_k + m_b} = 0,892 \text{ m s}^{-2}$$

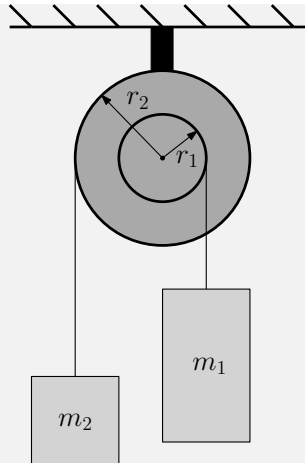
 $I = \frac{1}{3}ML^2$	 $I = \frac{1}{3}ML^2$
 $I = \frac{1}{12}ML^2$	 $I = \frac{1}{12}ML^2$
 $I = \frac{2}{5}MR^2$	 $I = \frac{1}{2}MR^2$
 $I = \frac{5}{7}MR^2$	 $I = MR^2$
 $I = \frac{2}{3}MR^2$	 $I = \frac{1}{4}MR^2$

Figuur 8.7: De meest voorkomende traagheidsmomenten. De blauwe lijn geeft de draaias aan.

Voorbeeld 8.10

In paragraaf 8.2.2 hebben we gekeken naar ideale katrollen, massa- en wrijvingsloos. We gaan nu kijken naar een wrijvingsloze katrol met massa. Deze dubbele katrol bestaat uit een deel met straal $r_1 = 20,0$ cm en massa $m_{k,1} = 1,00$ kg en een met straal $r_2 = 40,0$ cm en massa $m_{k,1} = 2,50$ kg.

► Wat is het totale traagheidsmoment van deze katrol?



Een gekoppelde niet-massaloze katrol met twee gewichten.

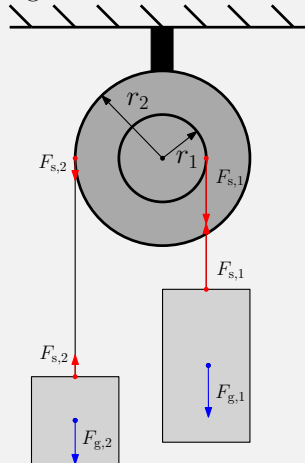
We zien in dat de individuele katrollen traagheidsmoment van $I = \frac{1}{2}MR^2$ hebben, zie figuur 8.7. Aangezien we traagheidsmomenten bij elkaar op mogen tellen is het totale traagheidsmoment gelijk aan:

$$I = \frac{1}{2}m_{k,1}r_1^2 + \frac{1}{2}m_{k,2}r_2^2 = 0,220 \text{ kg m}^2$$

Aan deze katrollen hangen massa's met massa's $m_1 = 4,00 \text{ kg}$ en $m_2 = 9,00 \text{ kg}$. Hierdoor krijgt de katrol hoekversnelling α .

► Wat is de hoekversnelling α van de katrol?

We maken eerst een free-body-diagram van de hele situatie om alle krachten te zien:



Het free-body-diagram van de vorige situatie.

Nu schrijven we allereerst de vergelijking voor het moment op:

$$\begin{aligned} \sum \tau &= I\alpha \\ F_{s,2}r_2 - F_{s,1}r_1 &= I\alpha \end{aligned} \quad (8.18)$$

We geven hierin F_1 een minteken omdat deze aanleiding geeft tot een draaiing met de klok mee.

We kennen de spankrachten F_s niet dus zullen we een vergelijking moeten maken voor de

krachten in de y -richting. We doen dit voor de twee dozen apart:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,1} + \vec{F}_{s,1} &= m_1 a_1 \\ F_{g,1} - F_{s,1} &= m_1 a_1 \\ F_{s,1} &= F_{g,1} - m_1 a_1\end{aligned}\tag{8.19}$$

En voor doos 2

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} + \vec{F}_{s,2} &= m_2 a_2 \\ F_{g,2} - F_{s,2} &= m_2 a_2 \\ F_{s,2} &= F_{g,2} - m_2 a_2\end{aligned}\tag{8.20}$$

Vervolgens vullen we (8.19) en (8.20) bij vergelijking (8.18) in:

$$\begin{aligned}(F_{g,2} - m_2 a_2)r_2 - (F_{g,1} - m_1 a_1)r_1 &= I\alpha \\ (m_2 g - m_2 \alpha r_2)r_2 - (m_1 g - m_1 \alpha r_1)r_1 &= I\alpha\end{aligned}$$

We halen het een en ander buiten haakjes:

$$g(m_2 r_2 - m_1 r_1) = \alpha(I + m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2)$$

En we lossen op voor α :

$$\alpha = \frac{g(m_2 r_2 - m_1 r_1)}{(I + m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2)} = 18,3 \text{ rad s}^{-2}$$

De katrol gaat dus tegen de klok in draaien.

► Wat is de versnellingen van massa 1 en 2?
Hiervoor kunnen we vergelijking (7.15) gebruiken.

$$a_1 = \alpha r_1 = 18 \cdot 0,20 = 3,66 \text{ m s}^{-2}$$

En voor massa 2:

$$a_2 = \alpha r_2 = 18 \cdot 0,40 = 7,32 \text{ m s}^{-2}$$

Uit het vorige voorbeeld wordt ook duidelijk dat de spankracht bij katrollen met massa, links en rechts *niet* het zelfde is!

8.4 Rotatie-energie

Met een momentsleutel is het mogelijk om af te lezen hoeveel moment er op een bout wordt gezet. We draaien een bout een kwartslag rond en meten met de sleutel dat dit een constant moment van $\tau = 540 \text{ N m}$ vereist, de sleutel zelf heeft een arm van $r = 60,0 \text{ cm}$.

Om dit moment te maken moeten we kracht zetten. Om de moer een kwartslag te draaien moeten we de sleutel verplaatsen. Ofwel, we verrichten arbeid.

Voor de kracht die we moeten zetten geldt (8.1):

$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{540}{0,600} = 900 \text{ N}$$

Voor de afstand waarover dit werkt geldt (7.5):

$$s = r\theta = 0,600 \cdot \frac{1}{2}\pi = 0,942 \text{ m}$$

Ofwel we moeten $900 \cdot 0,942 = 848$ J verrichten.

Laten we de bovenste twee vergelijkingen nogmaals bij elkaar invullen:

$$W = Fs = \frac{\tau}{r} r\theta$$

We zien een herkenbare vorm ontstaan voor arbeid voor rotaties:

$$W = \tau\theta \quad (8.21)$$

Of in vectornotatie:

$$W = \vec{\tau} \cdot \vec{\theta} \quad (8.22)$$

Maar omdat $\vec{\theta}$ en $\vec{\tau}$ altijd in dezelfde richting staan zullen we meestal de formulering van vergelijking (8.21) gebruiken waarbij de cosinus term weggelaten is.

Ook kunnen we gaan kijken naar de kinetische energie behorende bij rotaties:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{b}}^2$$

We schrijven hier v_{b} omdat het om de baansnelheid gaat waarvoor we vergelijking (7.13) kennen. Dit invullen geeft:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

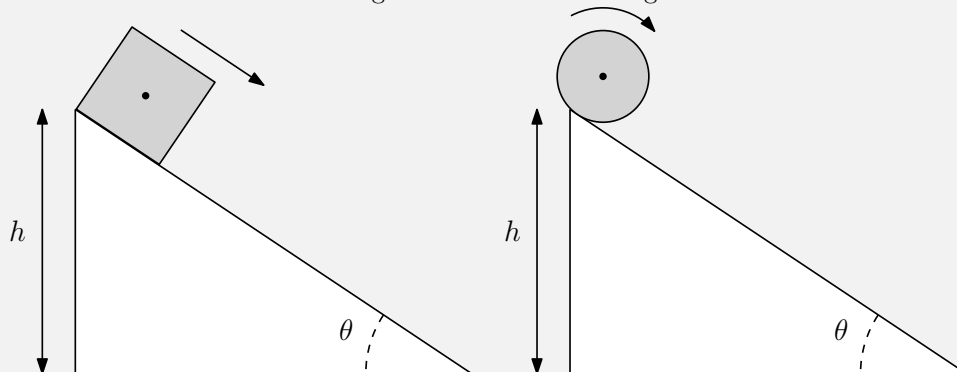
In de term mr^2 herkennen we het traagheidsmoment I . Voor de energie van rotaties geldt dus:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (8.23)$$

Wederom is deze vergelijking qua vorm identiek aan die van de normale kinetische energie.

Voorbeeld 8.11

Een kubus met $m = 1,5$ kg en ribbe $l = 10$ cm schuift wrijvingsloos van een helling met hoogte $h = 1,8$ m en hoek $\theta = 15^\circ$ omlaag. Daarna rolt een massieve bol met $m = 1,5$ kg en $r = 10$ cm van dezelfde helling af. Zie onderstaand figuur.



Een kubus schuift wrijvingsloos van een helling af

Een massieve bol rolt van een helling af

► Wat zijn de eindsnelheden van de kubus v_{k} en de bol v_{b} ?

Dit probleem laat zich het makkelijkste oplossen met energiebehoud. Voor de kubus geldt:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ E_z &= E_k \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_k^2 \end{aligned}$$

Het invullen en oplossen geeft $v_k = 5,9 \text{ m s}^{-1}$.
Voor de bol doen we het zelfde:

$$\begin{aligned} E_i &= E_f \\ E_z &= E_{\text{rot}} + E_k \\ mgh &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \\ mgh &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \end{aligned}$$

In deze laatste vergelijking schrijven we ω om in termen van v en r :

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{v_b}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \\ mgh &= \frac{1}{5}mv_b^2 + \frac{1}{2}mv_b^2 \\ mgh &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)mv_b^2 \end{aligned}$$

Waaruit we v_b op kunnen lossen, $v_b = 5,0 \text{ m s}^{-1}$.

Deze snelheid is lager dan die van de kubus. Dit komt omdat er ook zwaarte-energie in rotatie-energie omgezet is, er blijft dus minder energie voor de kinetische energie over.

► Wat zijn de versnellingen van de kubus en de bol?

Beide voorwerpen versnellen eenparig. Hiermee is de versnelling uit te rekenen als:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Omdat voor beiden de beginsnelheid 0 is, kunnen we voor Δv de eindsnelheden invullen. We moeten eerst de tijd vinden die ze er over doen om beneden aan de helling te komen. Dit kan met:

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Waarbij Δx eenvoudig uit te rekenen is als $\Delta x = \frac{h}{\sin \theta} = 7,0 \text{ m}$.

Omdat beide voorwerpen eenparig versnellen is de gemiddelde snelheid uit te rekenen als:

$$v_{\text{gem}} = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{v_f}{2}$$

Waar mee we krijgen $v_{\text{gem,k}} = 3,0 \text{ m s}^{-1}$ en $v_{\text{gem,b}} = 2,5 \text{ m s}^{-1}$.

Hiermee kunnen we de tijden uitrekenen: $\Delta t_k = 2,3 \text{ s}$ en $\Delta t_b = 2,8 \text{ s}$

Waarna we de versnellingen uit kunnen rekenen:

$$a_k = \frac{\Delta v_k}{\Delta t_k} = \frac{5,9}{2,3} = 2,5 \text{ m s}^{-2}$$

$$a_b = \frac{\Delta v_b}{\Delta t_b} = \frac{5,0}{2,8} = 1,8 \text{ m s}^{-2}$$

Merk op dat we in voorbeeld 6.9 hebben gekeken naar “glijdende” ballen en niet naar rollende. Hadden we naar rollende ballen gekeken hadden we deze extra rotatieenergie mee moeten nemen en was de berekening aanzienlijk gecompliceerder geweest.

8.5 Impulsmoment

We hebben al een hoop gelijknissen gezien tussen rechtlijnige bewegingen en rotaties. De enige grootte die we bij rotaties nog niet gezien hebben is de impuls. Bij rotaties wordt deze grootte *impulsmoment* genoemd, andere namen zijn *draaiimpuls* en *hoekmoment*.

Het impulsmoment, L , rekenen we als volgt uit:

$$L = I\omega \quad (8.24)$$

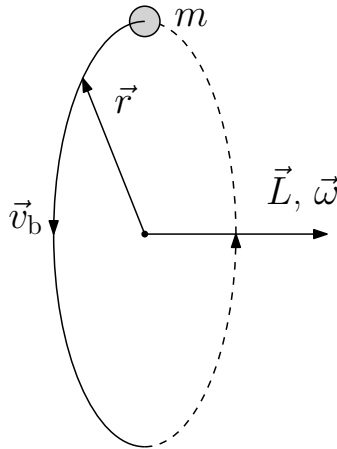
Of in vectornotatie:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (8.25)$$

Oorspronkelijk is impulsmoment als volgt gedefiniëerd:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (8.26)$$

Merk op dat als we voor $p = mv$ en voor $v = \omega r$ invullen met $I = mr^2$ hier, op de plaatsing van het uitproduct na, precies dezelfde vergelijking uit komt als (8.25). Merk ook op dat de richtingen die zowel (8.25) als (8.26) geven dezelfde richting is, zie figuur 8.8.



Figuur 8.8: De richting van L is dezelfde als ω .

Ook impulsmoment is net als impuls een behouden grootte ofwel:

$$\sum \vec{L}_i = \sum \vec{L}_f \quad (8.27)$$

We zien wederom, qua vorm, een enorme gelijkenis met de impuls, p , die we al kenden. Er zijn veel overeenkomsten tussen de grootheden bij rechtlijnige bewegingen en rotaties. Tabel 8.1

Lineair		Rotationeel	
x	plaats	θ	hoek
v	snelheid	ω	hoeksnelheid
a	versnelling	α	hoekversnelling
F	kracht	τ	moment
m	massa	I	traagheidsmoment
p	impuls	L	impulsmoment
t	tijd	t	tijd

Tabel 8.1: Geassocieerde grootheden bij rechte en draaiende bewegingen.

geeft een overzicht van de geassocieerde grootheden welke een soortgelijke rol vervullen.

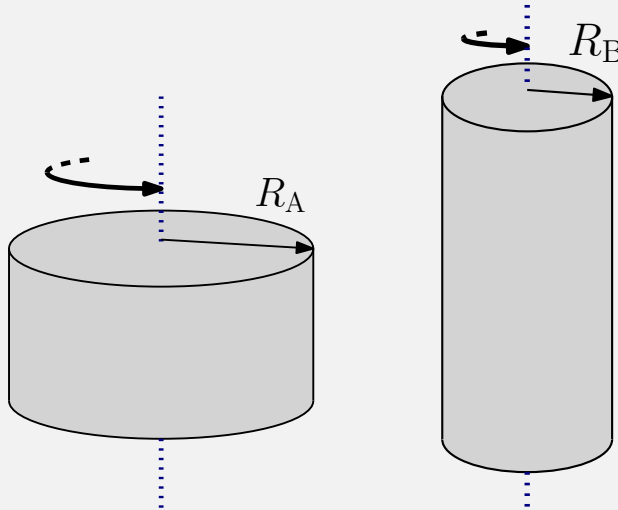
Voorbeeld 8.12

Impulsmoment kennen we allemaal uit het kunstschaatsen. Een ballerina draait om haar as en heeft haar armen uitgestrekt. Vervolgens trekt zij haar armen in en begint harder te draaien. De reden hiervoor is dat haar impulsmoment, net als bij de “gewone” impuls, behouden moet blijven.

We modelleren de beweging van de ballerina met een cilinder, zie onderstaande figuur. Allereerst draait de ballerina, $m = 50$ kg, met haar armen en benen breed we beschouwen dit als een massieve cilinder met straal $R_A = 80$ cm, zij draait dan een half rondje per seconde, zie onderstaande figuur situatie A.

Vervolgens trekt zij haar armen in waardoor de straal kleiner wordt $R_B = 30$ cm, zie onderstaande figuur situatie B.

► Wat is de hoeksnelheid van de ballerina nadat zij haar armen en benen in heeft getrokken?



Situatie A: De ballerina trekt haar armen en benen in.

Situatie B: De ballerina trekt haar armen en benen in.

Allereerst berekenen we de hoeksnelheid in situatie A. De ballerina draait een half rondje

per seconde ofwel:

$$\omega = \frac{\pi}{1,0} = 3,1 \text{ rad s}^{-1}$$

Daarna rekenen we het impulsmoment in situatie A uit:

$$L_A = I_A \omega_A = \frac{1}{2} m R_A^2 \omega_A = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0,80^2 \cdot 3,1 = 50 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

We weten volgens vanwege behoud van impulsmoment, vergelijking (8.27), dat moet gelden:

$$L_A = L_B$$

En voor L_B weten we:

$$L_B = I_B \omega_B = \frac{1}{2} m R_B^2 \omega_B$$

Ofwel:

$$\begin{aligned} 50 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} &= I_B \omega_B \\ &= \frac{1}{2} m R_B^2 \omega_B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0,30^2 \cdot \omega_B \end{aligned}$$

Hieruit volgt: $\omega_B = 22 \text{ rad s}^{-1}$, ofwel $T = 0,28 \text{ s}$.
Heel erg veel sneller dan in situatie A.

Ook in de astrofysica is impulsmoment belangrijk. Dit zien we in het volgende voorbeeld:

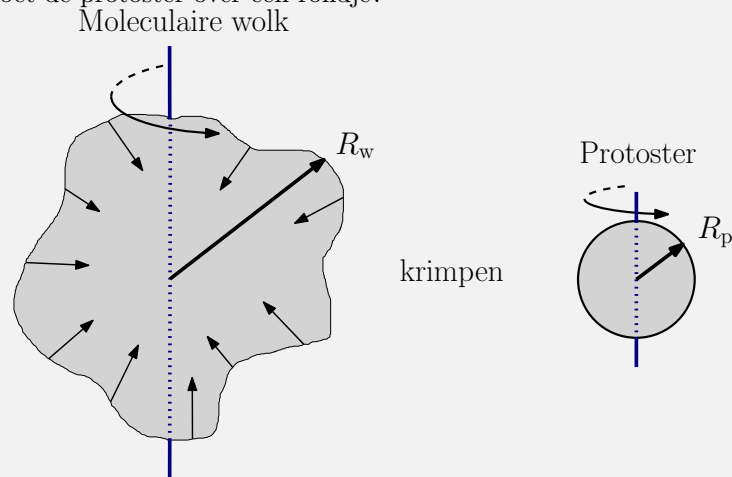
Voorbeeld 8.13

We bekijken een moleculaire gaswolk waaruit een protoster gevormd wordt. Moleculaire gaswolken hebben typisch een afmeting van $R_w = 1,0 \cdot 10^{20} \text{ m}$ en een massa van 1000 zonsmassa's, $m = 2,0 \cdot 10^{33} \text{ kg}$ en zijn bij benadering bolvormig.

Onder invloed van de zwaartekracht trekt deze wolk samen tot een protoster. Deze hebben typisch een afmeting van $2,0 \cdot 10^{15} \text{ m}$.

Laten we aannemen dat de gaswolk extreem langzaam draait, een rondje in 10^{10} jaar.

► Hoe lang doet de protoster over een rondje?



Een schematische evolutie van een moleculaire gaswolk tot protoster.

We beginnen meteen met het opstellen van de vergelijking voor impulsmoment behoud:

$$\begin{aligned} L_w &= L_p \\ I_w \omega_w &= I_p \omega_p \\ \frac{2}{5} m R_w^2 \omega_w &= \frac{2}{5} m R_p^2 \omega_p \\ R_w^2 \omega_w &= R_p^2 \omega_p \end{aligned}$$

Ofwel:

$$\omega_p = \left(\frac{R_w}{R_p} \right)^2 \omega_w$$

Gebruikmakende van vergelijking (7.8) voor ω krijgen we:

$$\frac{2\pi}{T_p} = \left(\frac{R_w}{R_p} \right)^2 \frac{2\pi}{T_w}$$

Dus voor T_p geldt:

$$T_p = \left(\frac{R_p}{R_w} \right)^2 T_w = 4,0 \text{ jaar}$$

De wolk draait dus velen malen sneller.

In werkelijkheid verliest de moleculaire wolk nog wat massa waardoor onze vergelijkingen wat anders worden. Realiteit blijft dat deze wolken ondanks dat heel veel sneller gaan draaien.

8.5.1 Impulsmoment stoot

In hoofdstuk 6 zagen we dat we impuls aan een systeem toe kunnen voegen met behulp van stoot. Bij rotaties is dit op de zelfde manier mogelijk. Maar vanwege het vreemde richtingskarakter van het impulsmoment geeft het aanleiding tot opmerkelijke verschijnselen.

De stoot bij het impulsmoment is uit te rekenen als:

$$\Delta \vec{L} = \vec{\tau} \Delta t \quad (8.28)$$

We bekijken een ronddraaiend fietswiel zie figuur 8.9. Aanvankelijk draait het fietswiel gewoon rond. Het heeft op dat moment een impulsmoment naar rechts gericht (blauw), zie figuur 8.9a.

Nu gaan we op de linker as van het fietswiel een kracht (rood) uitoefenen die het papier *uit* is gericht, op de rechter kant oefenen we een gelijkwaardige kracht uit maar nu het papier *in*, zie figuur 8.9b.

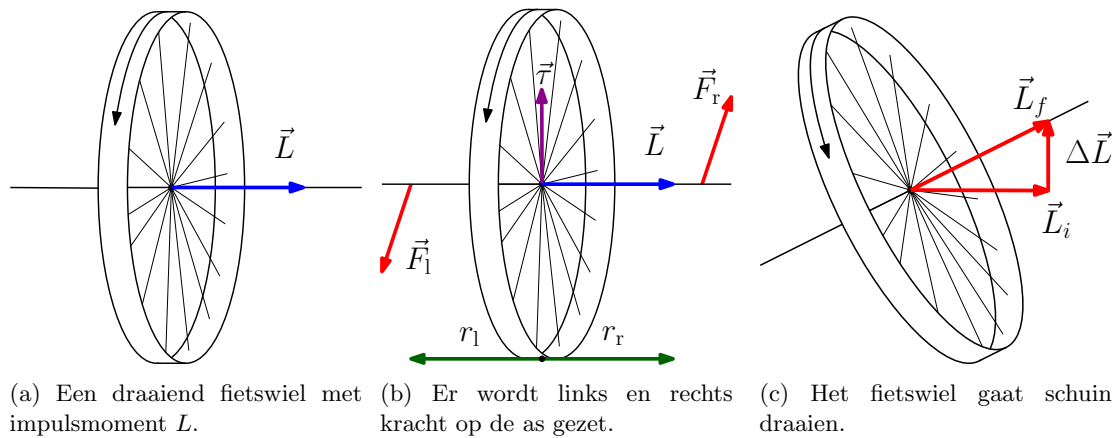
Deze krachten hebben beiden een bijbehorende arm (groen) r_l en r_r die beiden dezelfde waarde hebben.

Omdat de krachten loodrecht op de armen staan en de andere kant op wijzen geven ze samen aanleiding tot een moment (paars) $\tau = \tau_l + \tau_r$. De richting van dit moment is in de richting van het uitproduct van \vec{r} met \vec{F} en is *omhoog* gericht (zie figuur 1.7 en (8.2)).

Deze twee krachten, en dus het moment, oefenen we gedurende tijd Δt op de as uit. Dit geeft aanleiding tot een impulsmoment stoot $\Delta \vec{L}$ welke ook omhoog gericht is.

Omdat het impulsmoment behouden is zullen we ons oorspronkelijke impulsmoment \vec{L}_i vectoriëel bij de extra $\Delta \vec{L}$ op moeten tellen. De resultante \vec{L}_f staat nu schuin omhoog gericht, zie figuur 8.9c.

Ofwel, het fietswiel moet zo gaan draaien dat zijn as samen valt met de richting van de nieuwe \vec{L}_f .

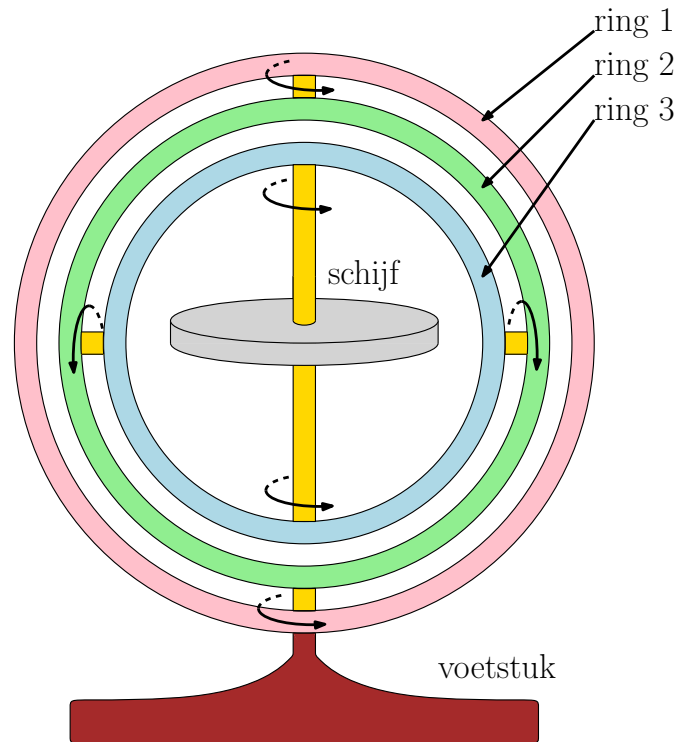


Figuur 8.9: Een fietswiel gaat contra-intuïtief draaien als er kracht op gezet wordt.

Hier moeten we even bij stil staan. We oefenen krachten op een draaiend wiel uit die *in* en *wit* het papier zijn gericht en als gevolg gaat het wiel draaien in de richting waarin aanvankelijk niets gebeurde? JA!

8.5.2 Gyroscop

Een veel gebruikte toepassing van impulsmomenten is de *gyroscop*, zie de voorkant van dit dictaat en een schematische weergave in figuur 8.10.



Figuur 8.10: Een gyroscop blijft altijd netjes rechtop staan.

De gyroscoop bestaat uit drie ringen en een schijf:

Ring 1 (roze) zit aan het voetstuk vast en kan niet draaien.

Ring 2 (groen) zit met een verticale as (geel) aan ring 1 vast en kan hiermee zelf om de verticale as draaien.

Ring 3 (blauw) zit met een horizontale as (geel) aan ring 2 vast en kan hiermee zelf om de horizontale as draaien.

Roterende schijf (grijs) deze zit met een horizontale, ten opzichte van ring 3, as (geel) vast aan ring 3. We noemen deze as de rotatie-as.

De rotatie-as kan, door de vrijheden van de assen van ring 2 en 3, in alle richtingen wijzen.

We laten nu de schijf met een grote snelheid draaien. Hij krijgt hierdoor een impulsmoment dat omhoog is gericht.

Wat gebeurt er als we het voetstuk oppakken en een kwartslag naar ons toe draaien (waardoor de bovenkant van de gyroscoop dus van ons af draait)?

We zetten geen kracht en dus geen moment op de draai-as van de schijf. Het impulsmoment van de schijf moet behouden blijven dus ring 3 zal op zijn plaats blijven. De hele constructie van het voetstuk, ring 1 en ring 2 zal gedraaid zijn maar ring 3 en de schijf zijn in de oorspronkelijke positie gebleven.

Daarna draaien we de hele constructie een kwartslag tegen de klok in. Wederom zal de rotatie-as dezelfde kant op blijven wijzen, we oefenen immers geen moment op deze as uit. Ring 2 zal dus deze keer gaan draaien en ring 1 en 3 draaien netjes met onze draaiing mee.

De gyroscoop zal dus altijd dezelfde kant op blijven wijzen omdat er geen moment op de rotatie-as uitgeoefend wordt.

Een toepassing hiervan is een gyrokompas. De as van het kompas wordt in lijn gesteld met het noorden en de rotatie-as wordt met een klein motortje aan de gang gehouden. Door de ringen en hun assen zal de rotatie-as steeds naar het noorden blijven wijzen.

Ook werd het vroeger in gevechtsvliegtuigen gebruikt om aan te geven wat de oriëntatie ten opzichte van de grond was. Dit werd eerst gedaan met een schijf en zwaartekrachtswerking maar een gyroscoop reageert vele malen sneller.

Nawoord

Dit is de vakinhoud van het vak Mechanica 2. Dit dictaat laat een aantal extra stappen zien die verder gaan dan wat de kennisbasis voorschrijft. Desondanks wilde ik jullie deze kennis en achterliggende gedachten niet ontnemen. Natuurkunde gaat niet over het wegvegen van details maar over het ontrafelen ervan.

Het effect van het fietswiel gaat volledig tegen alle intuïtie in. We kunnen het pas echt begrijpen als we de gekke regels van uitproducten begrijpen en ons beseffen dat er behouden grootheden zijn. Met deze informatie in het achterhoofd is het wiskundig gezien zo logisch als maar kan.

Ondanks deze wiskundige logica zijn het deze verbazingwekkende fenomenen die de natuurkunde voor mij zo interessant maken.

Ik hoop dat jullie deze interesse met mij delen en behouden om dit overbrengen op jullie eigen leerlingen.

Karel Kok

Index

- arbeid, 33
- assenstelsel, 4

- bewegingsvergelijkingen, 11, 13
- bewegingsvergelijkingen, rotaties, 64
- boog, 62
- botsing, elastisch, 48
- botsing, inelastisch, 52

- Cartesisch coördinatenstelsel, 5
- center of mass, 55
- center of mass, frame, 56
- center of mass, snelheid, 56
- centripetale versnelling, 26
- commutatief, 3
- component, 2

- draaiimpuls, 94

- eenparig, 11
- energie, 33, 36
- energie, gravitationeel, 40, 41
- energie, kinetisch, 38
- energie, omzetten, 38
- energie, potentieel, 35
- energie, rotatie, 91
- energie, zwaarte, 36
- energiebehoud, 38

- free body diagram, 22, 23

- geostationaire baan, 30
- gyroscoop, 98

- hefbomen, 76
- hefboom regel, 76
- hoekmoment, 94
- hoeksnelheid, 63
- hoekversnelling, 63

- impuls, 45
- impuls, behoud, 47
- impulsmoment, 94
- inertiaalstelsel, 15

- inproduct, 4, 5

- joule, 34

- katrol, 81
- katrol, los, 82
- katrol, vast, 82
- katrollen, ideaal, 81
- kogelbotssysteem, 51
- kop-staart methode, 3
- kracht, 15
- kracht, centripetaal, 27
- kracht, conservatief, 35
- kracht, free body diagram, 22
- kracht, gewicht, 21
- kracht, gravitatie, 19
- kracht, middelpuntzoekend, 27
- kracht, netto, 16
- kracht, normaal, 21
- kracht, paar, 17
- kracht, spankracht, 82
- kracht, wrijving, 22

- massa, traag, 16
- massa, zwaar, 19

- Newton, krachtwetten, 15
- no-slip randvoorwaarde, 67

- omlooptijd, 25
- ontbinden, 2
- ontsnappingsnelheid, 42

- plaats, 9
- poolcoördinaten, 61

- radialen, 62
- rechterhandregel, 7

- scalair, 1
- scalair vermenigvuldigen, 4
- snelheid, gemiddeld, 9
- snelheid, momentaan, 10
- steunvlak, 73

stoot, 46
stoot, impulsmoment, 97

traagheidsmoment, 83
trage massa, 16

uitproduct, 4, 6

valversnelling, 12
vector, 1
vectoroptelling, 3
vermogen, 42
versnelling, 10

watt, 42
wrijving, kinetisch, 23
wrijving, statisch, 23

zwaartepunt, 55