De harmonische oscillator

Karel Kok, HAN

november 2014

Om te begrijpen wat een harmonische oscillator is, is het noodzakelijk om dit vanuit differentiaalvergelijkingen te bekijken. Cutnell and Johnson slaat dit onderwerp helemaal over. Vandaar dat jullie in dit mini diktaatje uitleg vinden over wat een harmonische oscillator is. Je hoeft de afleidingen niet te kunnen reproduceren, maar je moet ze een keer gezien hebben om écht te begrijpen wat een harmonische oscillator is.

Massa-veer systeem

Allereerst kijken we naar een massa-veer systeem zoals in figuur 1. De kracht als functie van de uitwijking die wij moeten zetten om het blokje te verplaatsen wordt gegeven door de volgende formule:

$$\vec{F}_{\text{wij}} = k\vec{x} \tag{1}$$

Waarin k de veerconstante is en $\vec{x}$ de uitwijking ten opzichte van de evenwichtspositie. Om een veer uit te rekken moeten *wij* dus een positieve kracht uitoefenen die steeds groter wordt naar mate we de veer verder uitrekken.
Nu verplaatsen we ons naar het blokje. De pijlen uit figuur 1 geven de richtingen aan van de krachten en de uitwijking. Het is duidelijk te zien dat deze in tegengestelde richting staan.
Als we dus naar de kracht vam de veer *op het blokje* gaan kijken krijgen we de volgende formule:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \tag{2}$$

Nu bedenken we ons wat er gebeurt als we het blokje plotseling loslaten. De veer zal het blokje verplaatsen in de richting van de kracht. Hoe zal dit gebeuren?
Hier weten we iets over. Volgens de Tweede wet van Newton is de som van de krachten gelijk aan de massa maal de versnelling:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Omdat er maar een kracht werkt krijgen we:

$$m\vec{a} = -k\vec{x}$$

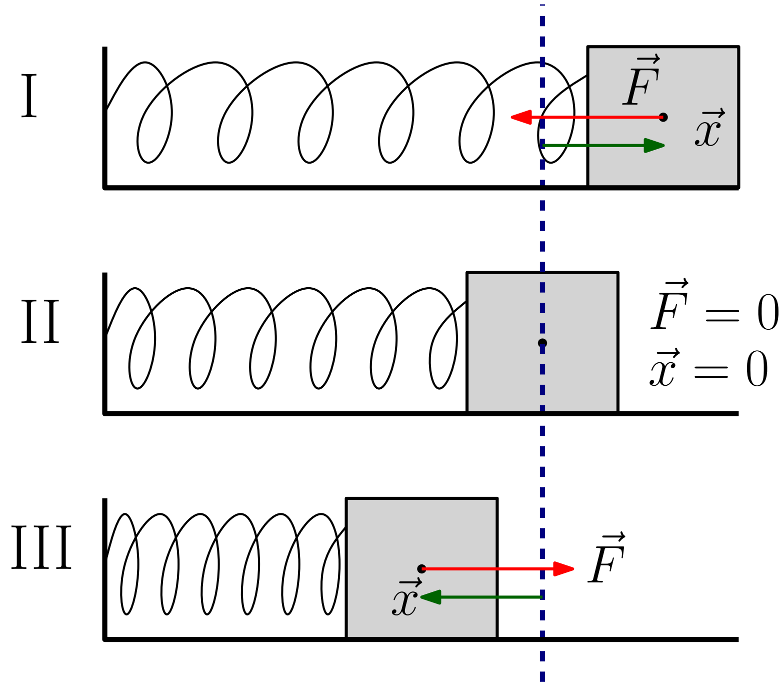
Maar we kennen een relatie tussen de versnelling $\vec{a}$ en de plaats $\vec{x}$. De versnelling is namelijk de dubbele tijdsafgelijde van de plaats:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{a}$$

We halen de massa naar de andere kant en krijgen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\,\vec{x}$$

De variabele $\vec{x}$ is niet zomaar een variabele, het is een functie. Deze functie geeft ons de positie van het blokje als functie van de tijd. Het blokje is immers op ieder tijdstip ergens anders (we



Figuur 1: Een simpel massa-veer systeem. De gestippelde lijn geeft de evenwichtstant aan.

hebben hem losgelaten en hij is heen en weer gaan trillen).
In het vervolg zullen we x dus schrijven als $x(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}\vec{x}(t) \tag{3}$$

De vergelijking die we nu hebben noemen we een *differentiaalvergelijking*. Het zegt iets over hoe een *functie* zich door de tijd heen verandert.

> De definitie van een harmonische oscillator is een oscillator wiens plaatsfunctie voldoet aan bovenstaande differentiaalvergelijking.[1] Elke andere (periodieke) beweging die niet aan deze differentiaalvergelijking voldoet is leuk, maar géén harmonische oscillator!

Nu moeten we de vergelijking nog op zien te lossen. Laten we eerst naar een wat vereenvoudigde, maar kwa vorm vergelijkbare, differentiaalvergelijking kijken:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} = f''(t) = -f(t)$$

Een vereenvoudigde schrijfwijze van een afgeleide is om dit met een accentteken aan te geven, de dubbele afgeleide krijgt dus twee accenttekens.
We zien dat de dubbele afgeleide van de functie gelijk moet zijn aan minus zichzelf.
Er zijn eigenlijk maar 3 functies die deze eigenschap vertonen: $\sin(x)$, $\cos(x)$ en e^{ix} [2].
Aangezien de cosinus niets meer is dan een horizontaal verschoven sinus maakt het eigenlijk niet

[1] en dít is dan ook de reden dat je dit mini diktaat leest in plaats van Cutnell and Johnson!

[2] Deze laatste functie zullen we (helaas) niet nader bekijken maar je zult je realiseren dat deze complexe e-macht van alles te maken moet hebben met de sinus en cosinus

uit welke van beiden we kiezen. We kiezen voor de cosinus (Cutnell and Johnson doet dit ook).

Als we de cosinus (of de sinus) twee keer afleiden krijgen we wederom de cosinus (of bij de sinus wederom de sinus) maar nu met een minteken $\cos''(x) = -\cos(x)$.
De cosinus lijkt dus in beginsel te voldoen aan onze (vereenvoudigde) differentiaalvergelijking.

Echter onze differentiaalvergelijking (3) heeft nog een constante voor de functie $x(t)$ aan de rechter kant van het =-teken staan.
Met behulp van de kettingregel[3] weten we dat $\cos(ax)'' = -a^2 \cos(ax)$. De constante, laten we deze voorlopig a noemen, komt dus twee keer naar buiten.
Als we de functie $f(at)$ dus twee keer afleiden krijgen we:

$$f''(at) = -a^2 f(t)$$

Als we hier vergelijking (3) naast leggen zien we eigenlijk dat moet gelden $a^2 = \frac{k}{m}$. Deze factoren staan immers op dezelfde plek.

Om aan de differentiaalvergelijking te voldoen moeten we dus niet alleen een sinus of cosinus functie gebruiken. Het argument van deze functie bevat ook nog een constante a die gelijk moet zijn aan $a = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Deze constante noemen we voortaan ω. Voor ω geldt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

We noemen deze vergelijking de *dispersierelatie*, deze geldt algemeen voor massa-veer systemen. Onze oplossing zal dus van de vorm $x(t) = \cos(\omega t)$ zijn.

Vergelijking (3) kan aan beide kanten ook nog met een constante A vermenigvuldigd worden. Deze constante geeft uiteindelijk de maximum uitwijking van ons blokje aan. Ga maar na, de cosinus heeft een maximum waarde van 1 en het kan best zijn dat ons blokje een uitwijking van 2 meter heeft. De vergelijking voldoet met deze amplitude nog steeds aan differentiaalvergelijking (3).
We noemen A de *amplitude* van de oscillatie en het heeft doorgaans eenheid meters. We kunnen nu dus onze plaatsfunctie $x(t)$ opschrijven:

$$\vec{x}(t) = A\cos(\omega t) \tag{5}$$

Met $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
De vergelijking die we hiermee hebben is een oplossing[4] van de differentiaalvergelijking (3). Het massa-veer systeem heeft dus de plaatsfunctie zoals de vergelijking hierboven en is een harmonische oscillator (het is immers een oplossing van de differentiaalvergelijking). Ga voor jezelf na dat dit daadwerkelijk een valide oplossing is van de differentiaalvergelijking.
Omdat, zoals eerder vermeld, alleen sinusen en cosinusen[5] oplossingen zijn van deze differentiaalvergelijking zou men dus ook kunnen zeggen: *"Elke trilling die door een sinus of cosinus beschreven kan worden is een harmonische oscillator"* maar ik vind dit wat kort door de bocht.

[3] $(f(u(x)))' = u'(x) \cdot f'(u(x))$.
[4] Dit is niet de meest algemene uitdrukking, de meest algemene zou $\vec{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ zijn. Dit heeft te maken met de keuze voor de sinus danwel cosinus in combinatie met de positie van de massa op $t = 0$. In ons geval is de massa op $t = 0$ op zijn uiterste positieve uitwijking.
[5] of een complexe e-macht

Snelheid en versnelling

We weten dat het argument in de cosinusfunctie dimensieloos moet zijn. De variabele ω heeft dus eenheid rad s^{-1}. Verder weten we dat de sinus en cosinus een periode van 2π radialen hebben. We willen graag dat de plaatsfunctie, $x(t)$, op $t = 0$ en $t = T$ dezelfde waarde geeft. We willen onze plaatsfunctie, $x(t)$, gaan omschrijven van hoeksnelheden, ω, naar periodes of trillingstijden, T. Dit gaat als volgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{6}$$

Hierbij kunnen we de periode, T, ook schrijven in termen van de frequentie, f, als:

$$T = \frac{1}{f} \tag{7}$$

We kunnen vergelijking (5) dus ook omschrijven tot:

$$\vec{x}(t) = A\cos(2\pi f t) \tag{8}$$

Nu weten we dus precies wanneer het blokje waar is. Maar wat kunnen we over zijn snelheid zeggen. We weten dat de snelheid de tijdsafgeleide van de plaats $x(t)$ is:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Als we vergelijking (5) differentiëren krijgen we:

$$\vec{v}(t) = -\omega A \sin(\omega t) = -2\pi f A \sin(2\pi f t) \tag{9}$$

Het minteken hierin komt vanwege het afleiden van de cosinus, maar is ook fysisch correct. Het blokje begint op $t = 0$ immers *terug* naar de evenwichtsstand te gaan.
We zien dat de snelheidsfunctie een iets andere amplitude heeft. Deze functie berijkt zijn maximum als de sinusfunctie gelijk is aan 1 of -1. De amplitude van $v(t)$ geeft ons dus de maximum snelheid.

$$v_{\mathrm{max}} = \omega A = 2\pi f A \tag{10}$$

Nemen we de tijdsafgeleide van de snelheid dan krijgen we de versnelling. Volgens vergelijkbare methode als we ook voor de snelheid deden krijgen we:

$$a_{\mathrm{max}} = \omega^2 A = (2\pi f)^2 A \tag{11}$$

Energie

Je kunt je voorstellen dat er energie in een massa-veer systeem zit. We hebben de veer immers met een bepaalde kracht een uitwijking gegeven:

$$W = \vec{F}_{\mathrm{gem}} \cdot \vec{s}$$

De weg $\vec{s}$ is in ons geval de uitwijking $\vec{x}$. Onze kracht en uitwijking zijn netjes parallel dus over het inproduct hoeven we ons niet al te druk te maken.
Verder weten we dat de kracht lineair toe neemt met de afstand. De kracht die we bij uitwijking x moeten verrichten is uit te rekenen met vergelijking (1). Echter de gemiddelde kracht $\vec{F}_{\mathrm{gem}}$ is de helft van deze kracht (teken maar eens een $F - s$ diagram). Dit gecombineerd levert:[6]

$$E_{\mathrm{veer}} = \frac{1}{2}kx(t)^2 \tag{12}$$

[6] voor een uitgebreidere afleiding zie pagina 285 van Cutnell and Johnson 9th edition

We zien dus dat de veerenergie een tijdsafhankelijke functie is geworden. Op tijdstip $t = \frac{1}{4}T$ is het blokje in de evenwichtsstand en kan er dus geen veerenergie zijn. We zien in vergelijking (9) echter dat dan de snelheid maximaal (negatief) is.
De veerenergie is op dat moment dus omgezet in kinetische energie.

Wiskundig is te bewijzen dat de energie in een massa-veer systeem constant is.
We gaan kijken naar een willekeurig tijdstip t. We weten dat de totale energie, E_{tot}, op dat moment een combinatie is van van de veerenergie en de kinetische energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \quad E_{\text{veer}} \quad + \quad E_{\text{kin}} \\ &= \frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2 \end{aligned}$$

Gebruikmakend van vergelijkingen (5) en (9) levert dit:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}k\big(A\cos(\omega t)\big)^2 + \frac{1}{2}m\big(-\omega A\sin(\omega t)\big)^2$$

Kwadraten uitschrijven:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t)$$

Nu gaan we de voorfactor van de kinetische energie omschrijven met behulp van vergelijking (4):

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}} &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t) \; + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2}kA^2\Big(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\Big) \end{aligned}$$

Gebruikmakende van de goniometrieregel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ levert dit:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}kA^2 \tag{13}$$

De energie van een massa-veer systeem is dus totaal tijdsonafhankelijk en constant. Dit konden we al zien aan vergelijking (12), maar zonder echt bewijs.

De slinger

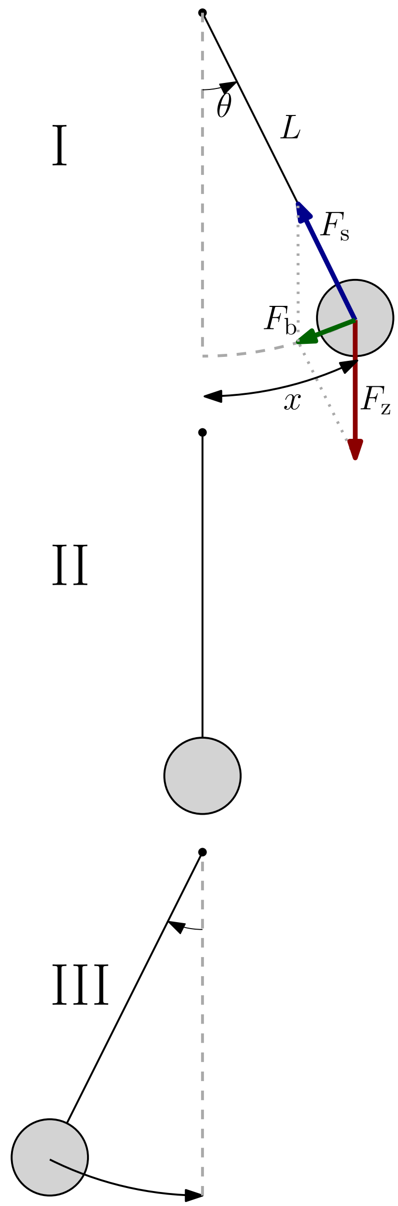
Een andere harmonische oscillator is de pendule, of slinger.
We bekijken een massa m aan een touw met lengte L zoals in figuur 2. De overeenkomsten met figuur 1 zijn snel gevonden, de massa is bij I ($t = 0$) in zijn uiterste positieve positie[7], bij II heeft hij maximale snelheid en bij III is hij in de uitsterste negatieve positie.
Voor de kracht, F_{b}, waarmee de slinger naar we evenwichtspositie wordt getrokken geldt:

$$F_{\text{b}} = mg\sin(\theta)$$

We weten wederom dat de som van de krachten gelijk is aan ma waarbij a de dubbele tijdsafgeleide van de plaats $x(t)$ is.

$$\begin{aligned} \sum F &= ma = -F_{\text{b}} \\ m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -mg\sin(\theta) \end{aligned}$$

[7]Merk op dat hier de snelheid 0 m s^{-1} is en dat er dus geen middelpuntzoekende kracht is



Figuur 2: Een simpele slinger. Bij situatie I ($t = 0$) zijn de krachten weergegeven die is bij de anderen weggelaten.

Waar het min-teken in deze vergelijking vandaan komt wordt later duidelijk.
We maken nu een extra denkstap. De plaats $x(t)$ is ergens op een cirkel ofwel:

$$x(t) = L\theta(t)$$

De tijdsafhankelijkheid zit dus in de hoek θ en niet in de plaats L.
We kunnen vergelijkbare differentiaalvergelijking opstellen. We nemen nu echter de hoek $\theta(t)$ als variabele in plaats van de positie $x(t)$. We hebben hier met een cirkelbeweging te maken en dus is het handiger naar deze variabele over te stappen, net zoals we dit bij Mechanica deden.

$$m\frac{\mathrm{d}^2\big(\theta(t)L\big)}{\mathrm{d}t^2} = mL\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg\sin\big(\theta(t)\big)$$

L is niet tijdsafhankelijk en mochten we dus buiten de differentiaal halen.
Daarna delen we door de m en halen we L naar de andere kant:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\sin\big(\theta(t)\big)$$

Nu maken we de kleine hoeken benadering voor θ. Hierdoor mogen we zeggen dat $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$. Ofwel:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\theta(t) \tag{14}$$

Nu kunnen we inzien waar het minteken vandaan komt. De dubbele afgeleide van θ is de hoekversnelling α. De richting van de hoekversnelling is riching de evenwichtsstand. De richting van de hoek is van de evenwichtsstand vandaan. Vandaar het minteken in deze vergelijking.
Nu maken we dezelfde stap als bij vergelijking (4). De factor voor onze $\theta(t)$-functie is dus eigenlijk het kwadraat van wat er uit de functie komt. Hieruit volgt dat:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{15}$$

Met behulp van vergelijking (6) kunnen we dus iets over de periode van de slinger zeggen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{16}$$

De hoekfunctie van de slinger is in dit geval minder van belang maar zou gegeven worden door:

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

Fysische slinger

Een fysische slinger is eigenlijk een rigide object met massa m dat slingert. Zie figuur 3. De slingertijd hiervan wordt net iets anders berekend als bij een gewone slinger.
We gaan kijken naar het moment τ die de slinger levert:[8]

$$\tau = mgd\sin\big(\theta(t)\big)$$

Vanuit mechanica weten we dat de som van de momenten gelijk is aan:

$$\sum\tau = I\alpha$$

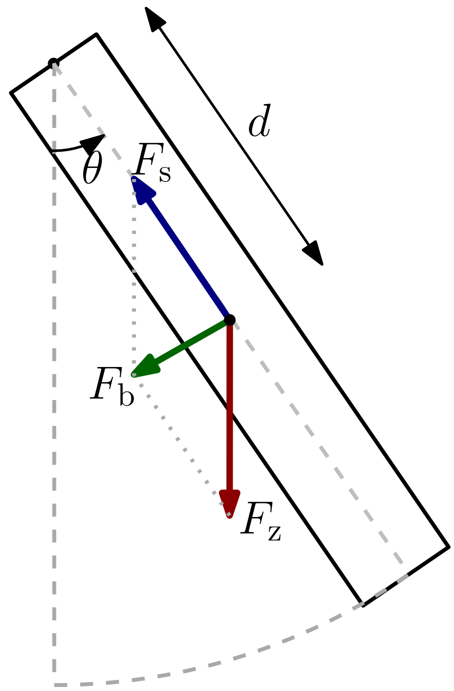
Hierin was I het traagheidsmoment en α de hoekversnelling.
Invullen geeft:

$$I\alpha = -mgd\sin\big((\theta(t)\big)$$

Ook voor de hoekversnelling kenden we een vergelijking:

$$\alpha(t) = \frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

[8] dit hadden we bij de gewone slinger ook kunnen doen maar dit had het nodeloos ingewikkeld gemaakt



Figuur 3: Een fysische slinger.

Wederom vullen we dit in:

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mgd\sin\big((\theta(t)\big)$$

Als we de benadering voor kleine hoeken maken volgt hieruit weer een differentiaalvergelijking met een bekende vorm:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgd}{I}\theta(t) \tag{17}$$

Uit de constante voor de $\theta(t)$ kunnen we weer de hoekfrequentie ω halen op de gebruikelijke manier. Dit levert:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{18}$$

Met behulp van vergelijking (6) kunnen we dus weer iets over de periode van de slinger zeggen:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{19}$$